内容提要

本书是日本几何学家立花俊一著《黎曼几何》的习题集。共有例题62题，习题276题。习题全有解答。例题是经过反复推敲而选出的典型题，许多习题选自出版当时最新文献，有一定的深度、难度。可供数学、物理、力学等专业的大学生、研究生学习使用，对教师、科学工作者也有参考价值。

原书1968年初版，中译本根据1974年第7版全文译出。

前　言

这本书是本讲座第 15 卷《黎曼几何》的习题集。根据讲座的计划，章节的划分与原书一致。原书各章问题以及章末习题都做为本习题集的例题或习题编写在书中。

按原书的编写意图，这里收集的问题全是和张量分析有关系的。选题时特别注意了以下两点：(i)使在原书中得到的知识更加具体和巩固，(ii)给原书中未曾使用过的公式补充实例做为应用。

从极其最近的论文中选择了许多题，可能给初学者带来些困难。但是读者即使解不出来也不必介意。把它看作轻松的读物，稍加思索后如找不到头绪就不必客气地请看解答。重要的不是让您解决给您提出的题，而是让读者自己发现问题并加以解决。如果在读这本习题集的过程中碰到疑问或注意到有关系的问题，我希望读者把它解决了，这是科学研究的开始。

以下略.

立花俊一　于东京

1968年 1 月

正值我的导师安达忠次 (T.Adati) 教授 70 诞辰，译者向他表示祝贺。

在这套书的中译过程中，东北工学院应用数学系的傅文章、李建华、杨胜芳等同志作了大量工作，特此表示谢意。

译者

目　　录

第四章　变换论

第五章　曲线论

第六章　子空间

第七章　积分公式

第一章　向量与张量

§1　向量空间

例题 1　试证零向量与逆元的唯一性。

解　设 0，0′ 都是零向量。对于任意 x，$x+0=x$。特别当 $x=0'$ 时，则

$$0'+0=0' \tag{1}$$

对于 0′ 也一样，在 $x+0'=x$ 里令 $x=0$ 得

$$0+0'=0 \tag{2}$$

根据(1.4)有 $0+0'=0'+0$，故由(1)，(2)可得 $0'=0$。

其次对于任意的 x 证明其逆元的唯一性。设 x'，x'' 都是 x 的逆元，则

$$x+x'=0,\quad x''+x=0。$$

故

$$x''+(x+x')=x''+0=x''$$
$$=(x''+x)+x'=0+x'=x'$$
$$\therefore\qquad x'=x''$$

例题 2　设 V 为定义在区间 $[0,1]=\{t\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}$ 上的连续函数全体之集。对于 f，$g\in V$，$a\in \boldsymbol{R}$，由

$$f=g \Longleftrightarrow f(t)=g(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$
$$(f+g)(t)=f(t)+g(t)$$
$$(af)(t)=af(t)$$

在 V 中定义相等、和、a 倍，则 V 为无限维向量空间。

解　规定 $0\in V$ 为对于所有的 t，$0(t)=0\in \boldsymbol{R}$ 的函数，再规定 f 的逆元为 $(-f)(t)=-(f(t))$，则 V 满足定义 1.1 的全部条件．故 V

为向量空间。

维数无限的原因是在V里线性无关的向量存在无限个，可证明如下。对于 $n=1, 2, \cdots$的各 n，考虑函数

$$f_n(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\\ 2(n+1)(nt-1)+1, & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\leqslant t\leqslant \frac{1}{n}\\ 1, & \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

在这样定义的V中，元 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$线性无关。其实，设对于 $f_1, f_2, \cdots, f_n$，

$$a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n=0$$
$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\in \boldsymbol{R}$$

成立。考虑两边的函数在 $t=1/n$ 的值

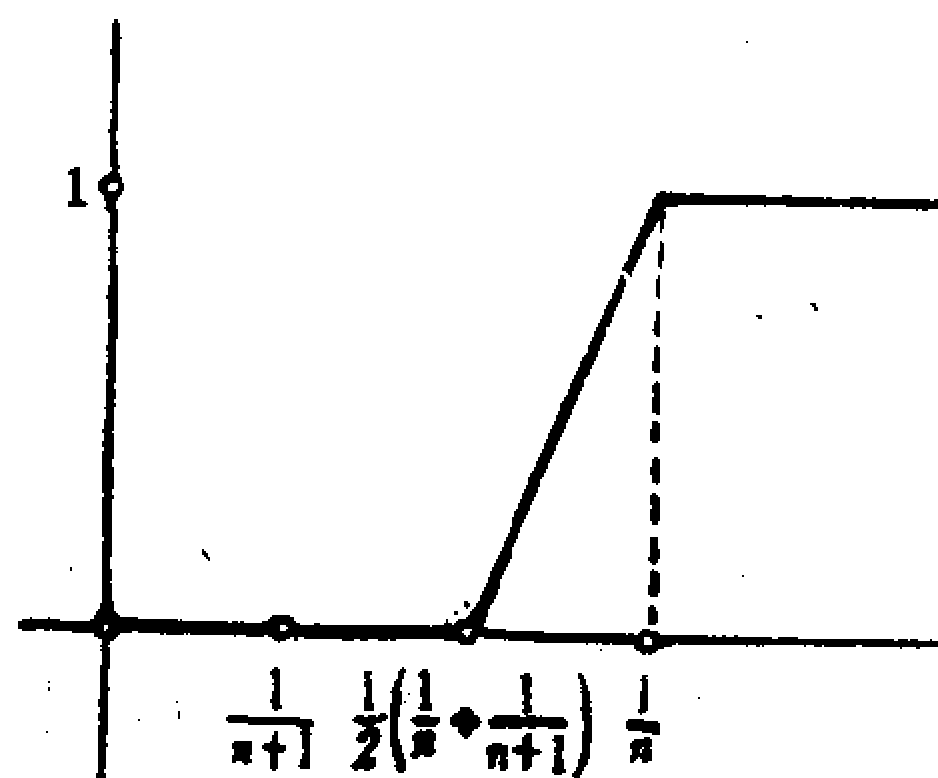


图 1

$$\begin{aligned}(a_1f_1+\cdots+a_nf_n)(1/n)&=a_nf_n(1/n)=a_n\\&=0(1/n)=0\end{aligned}$$

故得

$$a_1f_1+\cdots+a_{n-1}f_{n-1}=0$$

同理可得 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=0$。故知 $f_1, \cdots, f_n$线性无关。因 n 可以任意大，可见是无限维。

注意 区间〔0，1〕并非本质问题。此外，连续性也可去掉，又可加上可微性。

例题 3 如果向量 $x_1, \cdots, x_r$ 线性无关，$x_1, \cdots, x_r, y$ 线性相关，那末

$$y=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_rx_r$$

的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r\in \boldsymbol{R}$ 唯一地存在。

解 因 $x_1, \cdots, x_r, y$ 为线性相关，故存在不全为0的实数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta$ 使得

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r + \beta y = 0 \qquad (1)$$

其中 $\beta \neq 0$。原因是，如 $\beta = 0$ 则得 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r = 0$，从线性无关性得 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta = 0$，与假设矛盾。故从 $\beta \neq 0$，以 β 除(1)的两边可得

$$y = a_1 x_1 + \cdots + a_r x_r \qquad a_i \in \mathbf{R} \qquad (2)$$

的形状。

其次设又可写做 $y = a_1' x_1 + \cdots + a_r' x_r$。这时，与(2)边边相减得

$$(a_1 - a_1')x_1 + \cdots + (a_r - a_r')x_r = 0.$$

因 $x_1, \cdots, x_r$ 线性无关，故

$$a_1 - a_1' = \cdots = a_r - a_r' = 0.$$

可见(2)中系数的唯一性。

例题 4 在 n 维向量空间里，如 $e_1, \cdots, e_r (0<r<n)$ 线性无关，则适当选择 $n-r$ 个向量 $e_{r+1}, \cdots, e_n$ 可使 $e_1, \cdots, e_r, \cdots, e_n$ 为基底。

解 首先证明存在 x 使得 $e_1, \cdots, e_r, x$ 线性无关。如设不存在这样的 x，则对于任意 x；$e_1, \cdots, e_r, x$ 线性相关。故对于任意的 $x_1, \cdots, x_{r+1}$，$r+1$ 个向量 $e_1, \cdots, e_r, x_i$ $(i=1, \cdots, r+1)$ 线性相关，故存在 $x_i^a \in \mathbf{R}$ 使得

$$x_i = \sum_{a=1}^{r} x_i^a e_a \qquad (i = 1, \cdots, r+1)$$

考虑以 α^i 为未知数的联立方程

$$\sum_{i=1}^{r+1} \alpha^i x_i^a = 0 \qquad a = 1, \cdots, r$$

在此式中未知数的个数是 $r+1$，比方程的个数 r 多，存在不全为0的解 α^i。对于此 α^i

$$\sum_{i=1}^{r+1} \alpha^i x_i = \sum_i \alpha^i \sum_a x_i^a e_a = \sum_a \Big(\sum_i \alpha^i x_i^a \Big) e_a = 0$$

故 $x_1, \cdots, x_{r+1}$ 线性相关。从而V的任意 $r+1$ 个向量线性相关，而且 $e_1, \cdots, e_r$ 线性无关。故V的维数为 $r(<n)$，与假设矛盾。

因此存在 x 使得 $e_1, \cdots, e_r, x$ 线性无关，设这样 x 中之一为 e_{r+1}，如 $r+1<n$，同理可得 $e_{r+2}, \cdots, e_n$。

§2 对偶向量空间

例题 1 V的元可看做从 V^* 到$\boldsymbol{R}$的线性映射。

解 对于 $x\in V$，$u\in V^*$，如用

$$x'(u)=\langle x, u\rangle\in \boldsymbol{R} \tag{1}$$

定义

$$x':V^*\to\boldsymbol{R}$$

则

$$x'(u+v)=\langle x, u+v\rangle=(u+v)(x)=u(x)+v(x)$$
$$=\langle x, u\rangle+\langle x, v\rangle=x'(u)+x'(v),$$
$$x'(au)=\langle x, au\rangle=au(x)=ax'(u)$$

成立，于是 x' 为线性映射。今设 $V^*\to\boldsymbol{R}$ 的线性映射全体即 V^* 的对偶向量空间为 V^{**}。对于 $x\in V$，对应以由(1)而定的 x'，考虑

$$\phi: V\to V^{**},\quad x\to x'=\phi(x)$$

我们来证明 ϕ 为同构映射。首先因

$$\phi(x+y)(u)=\langle x+y, u\rangle=\langle x, u\rangle+\langle y, u\rangle$$
$$=\phi(x)(u)+\phi(y)(u),$$
$$\phi(ax)(u)=\langle ax, u\rangle=a\langle x, u\rangle=a\phi(x)(u)$$

对于任意的 u 成立，故

$$\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y),\quad \phi(ax)=a\phi(x).$$

因此 ϕ 是线性。其次证明 ϕ 是一对一在上对应。为此，设$\{e_\lambda\}$为V的基底，$\{f^\lambda\}$为其对偶基底。再设 $x^*\in V^{**}$，则

$$x^*(u)=x^*(u_\lambda f^\lambda)=u_\lambda x^*(f^\lambda)$$

故令 $a^\lambda=x^*(f^\lambda)\in\boldsymbol{R}$ 得

$$x^*(u)=a^\lambda u_\lambda$$

另外，对于 $x=x^\lambda e_\lambda\in V$，

$$\phi(x)(u)=\langle x,\ u\rangle=x^\lambda u_\lambda$$

成立。从而 $x^*(u)=\phi(x)(u)$对于任意的 u 成立的条件是 $a^\lambda=x^\lambda$。此事说明 ϕ 是一对一在上对应。故 ϕ 是同构映射。于是如将 $x\in V$与 $\phi(x)\in V^{**}$ 等同之，则 V 的元 x 可看做从 V^* 到 $\boldsymbol{R}$ 的线性映射$\phi(x)$。

例题 2 设 $x\in V$，$x\neq 0$，则存在 $f\in V^*$ 使得 $f(x)\neq 0$。

解 设$\{e_\lambda\}$为一组基底，从 $x=x^\lambda e_\lambda\neq 0$知 x^1，…，x^n 中有不是0的。今设 $x^1\neq 0$。对于 $y\in V$，由

$$f(y)=f(y^\lambda e_\lambda)=y^1\in \boldsymbol{R}$$

定义 f，显然 f 是线性的，因此 $f\in V^*$ 而且满足 $f(x)=x^1\neq 0$.

§3 张 量

例题 1 (1，1)阶张量可看做 $V\to V$的线性映射也可看做 $V^*\to V^*$ 的线性映射。

解 设T为(1，1)阶张量，关于V的基底$\{e_\lambda\}$的分量为 $T^\mu{}_\lambda$。对于 $x=x^\lambda e_\lambda\in V$，$T^\lambda{}_\mu x^\mu$ 是反变向量的分量，则对应

$$T':x\in V\to(T^\lambda{}_\mu x^\mu)e_\lambda\in V$$

与基底的选法无关，具有意义。显然 T' 是线性映射．而这种 T' 满足

$$T(u,\ x)=\langle T'(x),\ u\rangle \tag{1}$$

反之，设给定一线性映射 T'：$V\to V$，由(1)定义T．T是对应：$V^*\times V\to \boldsymbol{R}$，然由$\langle\ ,\ \rangle$的多重线性与 T' 的线性可见，它是(1，1)阶张量。

这样，$V\to V$ 的线性映射全体所作向量空间与张量空间 $\boldsymbol{T}_1{}^1$ 之间有一一对应（其实是同构映射），故将相对应者等同之即可。对于 $V^*\to V^*$ 也一样。

例题 2 如张量空间 $\boldsymbol{T}_2{}^1$ 的元 $T=(T^\lambda{}_{\mu\nu})$ 与 n^3 维数向量空间（参照习题一的第 3 题）的元

$$\phi(T)=(T^1{}_{11},\ T^1{}_{12},\ \cdots,\ T^1{}_{1n},\ T^1{}_{21},\ \cdots,\ T^1{}_{2n},\ \cdots,\ T^n{}_{n1},\ T^n{}_{n2},\ \cdots,\ T^n{}_{nn})$$

相对应，则 ϕ 是同构映射。

解 显然 ϕ 是一对一在上映射。再从和，数量倍的定义得 $\phi(T+S)=\phi(T)+\phi(S)$，$\phi(aT)=a\phi(T)$ 成立，可见又是线性的。故 ϕ 是同构映射。

注意 在 $T_2{}^1$ 里，一分量为 1，其他分量全为 0 的元（这样的元共有 n^3 个）作成向量空间 $T_2{}^1$ 的基底。

例题 3 对于各基底 $\{e_\lambda\}$，给定

$$\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_p}=\begin{vmatrix}\delta_{\mu_1}{}^{\lambda_1}\cdots\delta_{\mu_p}{}^{\lambda_1}\\ \vdots \qquad \vdots\\ \delta_{\mu_1}{}^{\lambda_p}\cdots\delta_{\mu_p}{}^{\lambda_p}\end{vmatrix}$$

则它们是一个 $(p,\ p)$ 阶张量的分量，并有下列性质。

(i) 关于 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p$（以及 $\mu_1,\ \cdots,\ \mu_p$）反称。

(ii) 如 $\lambda_1<\cdots<\lambda_p$，$\mu_1<\cdots<\mu_p$，则

$$\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_p}=\delta_{\mu_1}{}^{\lambda_1}\cdots\delta_{\mu_p}{}^{\lambda_p}.$$

解 设 $\{f^\lambda\}$ 为 $\{e_\lambda\}$ 的对偶基底，我们来证明在基底变换

$$\bar{e}_\lambda=a_\lambda{}^\mu e_\mu,\quad \bar{f}^\lambda=b_\mu{}^\lambda f^\mu,\quad B=(b_\mu{}^\lambda)=A^{-1}$$

$\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_p}$ 满足张量的变换规律。

因 $\delta_\mu{}^\lambda=b_\alpha{}^\lambda a_\mu{}^\beta\delta_\beta{}^\alpha$ 成立，故

$$\begin{vmatrix}\delta_{\mu_1}{}^{\lambda_1}\cdots\delta_{\mu_p}{}^{\lambda_1}\\ \vdots\\ \delta_{\mu_1}{}^{\lambda_p}\cdots\delta_{\mu_p}{}^{\lambda_p}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_{\alpha_1}{}^{\lambda_1}a_{\mu_1}{}^{\beta_1}\delta_{\beta_1}{}^{\alpha_1}\cdots b_{\alpha_1}{}^{\lambda_1}a_{\mu_p}{}^{\beta_p}\delta_{\beta_p}{}^{\alpha_1}\\ \vdots\\ b_{\alpha_p}{}^{\lambda_p}a_{\mu_1}{}^{\beta}\delta_{\beta_1}{}^{\alpha_p}\cdots b_{\alpha_p}{}^{\lambda_p}a_{\mu_p}{}^{\alpha_p}\delta_{\beta_p}{}^{\alpha_p}\end{vmatrix}$$

$$=b_{\alpha_1}{}^{\lambda_1}\cdots b_{\alpha_p}{}^{\lambda_p}a_{\mu_1}{}^{\beta_1}\cdots a_{\mu_p}{}^{\beta_p}\begin{vmatrix}\delta_{\beta_1}{}^{\alpha_1}\cdots\delta_{\beta_p}{}^{\alpha_1}\\ \vdots\\ \delta_{\beta_1}{}^{\alpha_p}\cdots\delta_{\beta_p}{}^{\alpha_p}\end{vmatrix}$$

即

$$\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_p}=b_{\alpha_1}{}^{\lambda_1}\cdots b_{\alpha_p}{}^{\lambda_p}\,a_{\mu_1}{}^{\beta_1}\cdots a_{\mu_p}{}^{\beta_p}\,\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_p}$$

故令 $\bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_p}=\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_p}$，$T^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_p}=\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_p}$，可见$T$满足张量的分量的变换式(3.2)。

（i） 从行列式的性质显然。

（ii） 令$a=\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_p}$，$b=\delta^{\lambda_1}_{\mu_1}\cdots\delta^{\lambda_p}_{\mu_p}$. 取 λ_1，…，λ_p 与 μ_1，…，μ_p 为 1，…，n 的不同组，则 $a=b=0$（例如，λ_1 与μ_1，…，μ_p 都不相同，则在 a 的行列式里的第一行全是0）。当 λ_1，…，λ_p 与 μ_1，…，μ_p 有相同排列时，$\lambda_1=\mu_1$，…，$\lambda_p=\mu_p$，故 $a=b=1$。无论如何 $a=b$。

§4 欧氏向量空间

例题 1 设 e_1，…，e_n 为从基底 a_1，…，a_n 经施密特正交化而得到的标准正交基。这时，a_1，…，a_k，e_{k+1}，…，e_n 也是基底，而且

$$\langle a_i,\ e_j\rangle=0\quad i=1,\ \cdots,\ k;\quad j=k+1,\ \cdots,\ n \qquad (1)$$

成立。

解 首先证明 e_1，…，e_r 所张空间 $V_{e_1\cdots e_r}$ 与 a_1，…，a_r 所张空间 $V_{a_1\cdots a_r}$ 一致。因 $e_1=a_1/\|a_1\|$，故 $V_{e_1}=V_{a_1}$。其次假设 $V_{e_1\cdots e_r}=V_{a_1\cdots a_r}$ 成立，证明 $V_{e_1\cdots e_{r+1}}=V_{a_1\cdots a_{r+1}}$。令 $c=\|a_{r+1}-\sum\limits_{i=1}^{r}\langle a_{r+1},\ e_i\rangle e_i\|$，由 e_{r+1} 的作法可见

$$ce_{r+1}=a_{r+1}-\sum_{i=1}^{r}\langle a_{r+1},\ e_i\rangle e_i$$

因右边 $\in V_{a_1\cdots a_{r+1}}$，故 $e_{r+1}\in V_{a_1\cdots a_{r+1}}$。再从 $a_{r+1}=ce_{r+1}+\sum\langle a_{r+1},\ e_i\rangle e_i$ 得 $a_{r+1}\in V_{e_1\cdots e_{r+1}}$。可见 $V_{a_1\cdots a_{r+1}}=V_{e_1\cdots e_{r+1}}$。

因 $a_i\in V_{e_1\cdots e_k}(i=1,\ \cdots,\ k)$，而且$\langle e_i,\ e_j\rangle=0$（$j=k+1$，…，

n)，故得

$$\langle a_i, e_j\rangle = 0, \quad i=1, \cdots, k; \quad j=k+1, \cdots, n. \qquad (1)$$

其次证明 $a_1, \cdots, a_k, e_{k+1}, \cdots, e_n$ 作成基底。从 $V_{a_1\cdots a_k} = V_{e_1\cdots e_k}$ 可知，这样 n 个向量张成 V，因此证出其线性无关性即可.由(1)可见

$$c_1 a_1 + \cdots + c_k a_k + c_{k+1} e_{k+1} + \cdots + c_n e_n = 0, \quad c_1, \cdots, c_n \in \boldsymbol{R}$$

的两边与 e_{k+1} 作内积，根据(1)得 $c_{k+1}=0$。同理 $c_{k+2}=\cdots=c_n=0$。故得 $c_1 a_1 + \cdots + c_k a_k = 0$，从 $a_1, \cdots, a_k$ 的线性无关性得 $c_1 = \cdots = c_k = 0$，从而 $a_1, \cdots, a_k, e_{k+1}, \cdots, e_n$ 线性无关。

例题 2 对于任意 n 维向量空间，恒可给予度量使之成为欧氏向量空间。

解 设$\{e_\lambda\}$为 V 的任意基底。令 $x = x^\lambda e_\lambda$，$y = y^\lambda e_\lambda$，定义映射 g 为

$$g: V \times V \to \boldsymbol{R}, \quad g(x, y) = \sum_{\lambda=1}^{n} x^\lambda y^\lambda$$

则 g 为对称、正定、多重线性，因此$\{V, g\}$变为欧氏向量空间。

注意 g 关于$\{e_\lambda\}$的分量为 $\delta_{\lambda\mu}$。关于其他基底 $\bar{e}_\lambda = a_\lambda{}^\mu e_\mu$ 的分量由 $\bar{g}_{\lambda\mu} = a_\lambda{}^\alpha a_\mu{}^\beta \delta_{\alpha\beta} = \sum a_\lambda{}^\alpha a_\mu{}^\alpha$ 而定。

例题 3 在伴随于欧氏向量空间$\{V, g\}$的张量空间 $\boldsymbol{T}_2{}^0$ 里，定义⟨ , ⟩为

$$\langle T, S\rangle = g^{\lambda\mu} g^{\alpha\beta} T_{\lambda\alpha} S_{\mu\beta}, \quad T, S \in \boldsymbol{T}_2{}^0,$$

则关于这种内积，$\boldsymbol{T}_2{}^0$ 是欧氏向量空间。

解 因 $\boldsymbol{T}_2{}^0$ 为 n^2 维向量空间，故与§3 例题2相同，可与 n^2 维向量空间等同。在这种等同下，令

$$T_{\lambda\alpha} = x^{(\lambda-1)n+\alpha}, \quad S_{\lambda\alpha} = y^{(\lambda-1)n+\alpha}$$

将张量 T，S 看做向量 x^A，y^A($A=1, \cdots, n^2$)。现在根据

$$G_{(\lambda-1)n+\alpha,\ (\mu-1)n+\beta} = g^{\lambda\mu} g^{\alpha\beta}$$

定义 G_{AB}，则

$$G(T, S) = G_{AB} x^A y^B = g^{\lambda\mu} g^{\alpha\beta} T_{\lambda\alpha} S_{\mu\beta} = \langle T, S\rangle$$

G^{AB} 是对称、正定（参照习题一 第37题)、多重线性，故为度量张量。

注意 矩阵 $\widetilde{G}=(G_{AB})$是 $n^2\times n^2$ 矩阵，详细写之如下。

$$\widetilde{G}=\begin{pmatrix} g^{11}G^{-1} & g^{12}G^{-1}\cdots g^{1n}G^{-1} \\ \vdots & \vdots \\ g^{n1}G^{-1} & g^{n2}G^{-1}\cdots g^{nn}G^{-1}\end{pmatrix}$$

其中 G^{-1} 表示 n 阶矩阵 $G^{-1}=(g^{\lambda\mu})$。$g^{\lambda\mu}G^{-1}$ 的含义是 G^{-1} 的 $g^{\lambda\mu}$ 倍。例如

$$g^{11}G^{-1}=g^{11}\begin{pmatrix} g^{11} & \cdots g^{1n} \\ \vdots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots g^{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g^{11}g^{11} & \cdots g^{11}g^{1n} \\ \vdots & \vdots \\ g^{11}g^{n1} & \cdots g^{11}g^{nn}\end{pmatrix}$$

这样的矩阵 $\widetilde{G}$ 称为 G^{-1} 与 G^{-1} 的**克朗纳格积**或**张量积**，以 $G^{-1}\otimes G^{-1}$ 记之。一般地说，$m\times n$ 矩阵A与 $k\times l$ 矩阵B的张量积$A\otimes B$是由

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots a_{1n}B \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots a_{mn}B\end{pmatrix}$$

定义的$(mk)\times(nl)$矩阵。

习　题　一

1. (i) $0x=0$,　(ii) $(-1)x=-x$。

2. (i) 如 x_1, …, x_r 线性无关，则 x_1, …, $x_s(s<r)$也线性无关。

(ii) 如 x_1, …, x_s 线性相关，则 x_1,…, x_s, …, x_r 也线性相关。

3. 对于集 $V=\{x\,|\,x=(x_1,\cdots,x_n),\ x_\lambda\in\boldsymbol{R}\}$ 的元 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\ \cdots,\ y_n)$，根据

$$x=y\Longleftrightarrow x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ \cdots,\ x_n=y_n,$$
$$x+y=(x_1+y_1,\ \cdots,\ x_n+y_n),$$

$$ax=(ax_1,\ \cdots,\ ax_n)$$

定义运算，则 V 为 n 维向量空间。

注意 这个向量空间称为 n **维数向量空间**。

4. 当 $e_1, \cdots, e_r$ 线性无关时，$\overline{e}_j=\sum_{i=1}^{r}a_j{}^ie_i,\ j=1,\cdots,r$ 线性无关的充要条件是 r 阶矩阵 $A=(a_j{}^i)$ 正则。

5. r 个向量 $x_1, \cdots, x_r$ 的线性组合全体作成的集

$$U=\left\{x \mid x=\sum_{i=1}^{r}a_ix_i,\ a_i\in \boldsymbol{R}\right\}$$

称为 $x_1, \cdots, x_r$ 张成的空间。这时

(i) U 为子空间。

(ii) 如 $x_1, \cdots, x_r$ 线性无关，则 U 是 r 维。

6. 设 V，U 分别为 n，m 维向量空间。在直积集 $W=V\times U=\{(a,\ x) \mid a\in V,\ x\in U\}$ 里定义运算如下：

$$(a,\ x)=(b,\ y)\Longleftrightarrow a=b,\ x=y,$$

$$(a,\ x)+(b,\ y)=(a+b,\ x+y)$$

$$\lambda(a,\ x)=(\lambda a,\ \lambda x),\ \lambda\in \boldsymbol{R}$$

关于这种运算，W 是 $n+m$ 维向量空间。

注意 记做 $W=V+U$，称为 V 与 U 的**直和**。

7. 设 $\overline{e}_\lambda=a_\lambda{}^\mu e_\mu$，$e_\lambda'=c_\lambda{}^\mu\overline{e}_\mu$ 为基底变换，试求向量 x 的分量 x^λ，x'^λ 的关系。

8. 对于线性映射 ϕ：$V\to U$，

$$\phi(0)=0,\ \phi(-x)=-\phi(x)$$

9. 对于线性映射 ϕ：$V\to U$，V 的象

$$\phi(V)=\{y \mid y=\phi(x),\ x\in V\}$$

是 U 的子空间。此外，$0\in U$ 的整个逆象

$$\phi^{-1}(0)=\{x \mid \phi(x)=0\}$$

是 V 的子空间。

10. 线性映射 ϕ：$V\to U$，ψ：$U\to W$ 的复合 $\psi\circ\phi$：$V\to W$ 也是线

性映射。

11. 线性映射 $\phi: V \to U$ 是在中同构映射的充要条件是下列命题之一成立。

(i) $\phi^{-1}(0) = \{0\}$。

(ii) 关于V的一组基底$\{e_\lambda\}$，$\lambda = 1, \cdots, n$，$\phi(e_\lambda) = b_\lambda{}^i f_i$ 线性无关。其中$\{f_i\}$，$i = 1, \cdots, m$，为U的基底。

(iii) $m \times n$ 矩阵 $B = (b_\lambda{}^i)$的秩是 n。

12. 设$\{e_\lambda\}$为基底时，对于 $x = x^\lambda e_\lambda$，令

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{r} x^i e_i, \qquad \psi(x) = \sum_{a=r+1}^{n} x^a e_a$$

则 ϕ，ψ 都是线性映射，而且下列关系成立。

$$\phi^2 = \phi, \quad \psi^2 = \psi, \quad \phi \circ \psi = \psi \circ \phi = 0, \quad \phi + \psi = \psi + \phi = I$$

其中设 0 为零映射，I为恒等映射，$\phi^2 = \phi \circ \phi$，$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$。

13. 当线性映射 $\phi: V \to V$ 满足 $\phi^2 = \phi$ 时，令 $\psi = I - \phi$，$F = I - 2\phi$，则

$$\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = 0, \quad \psi^2 = \psi, \quad F^2 = I$$

成立。

注意 ϕ，ψ 称为**射影映射**。

14. 同维二向量空间互相同构。

15. V^* 的任意基底是V的某基底的对偶基底。

16.
$$\delta^{\lambda\mu} = \begin{cases} 1, & \lambda = \mu \text{ 时} \\ 0, & \lambda \neq \mu \text{ 时} \end{cases}$$

亦称为**克朗纳格的德耳他**。不存在二阶反变张量使得其分量关于任何基底总是 $\delta^{\lambda\mu}$。

17. $(1, p)$阶张量可看做从$V \times \cdots \times V$（p个）到V的多重线性映射.

18. 设 $S = (S_{\lambda\mu})$为张量，令 $T_{\lambda\mu} = S_{\mu\lambda}$，则 $T = (T_{\lambda\mu})$也是张量。

19. 通过讨论张量的分量的变换式，试证其分量的对称、反称性

与基底的取法无关。

20. 设张量 $T_{\lambda\mu\nu}$ 关于 λ, μ 对称，而且关于 λ, ν 反称。这时 $T_{\lambda\mu\nu}$ 是零张量。

21. 如张量 $T_{\lambda\mu\nu\omega}$ 满足

$$T_{\lambda\mu\nu\omega}=-T_{\mu\lambda\nu\omega}=-T_{\lambda\mu\omega\nu},$$

$$T_{\lambda\mu\nu\omega}+T_{\mu\nu\lambda\omega}+T_{\nu\lambda\mu\omega}=0,$$

则

(i) $T_{\lambda\mu\nu\omega}+T_{\lambda\nu\omega\mu}+T_{\lambda\omega\mu\nu}=0$,

(ii) $T_{\lambda\mu\nu\omega}=T_{\nu\omega\lambda\mu}$

成立。

22. 设 $u^{\lambda\mu\nu}$ 为反称张量，则对于前题的 $T_{\lambda\mu\nu\omega}$,

$$u^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu\omega}=0$$

23. 设 $a_{\lambda\mu}$, $a_{\lambda\mu\nu}$ 为任意张量，则

$$b_{\lambda\mu}=a_{\lambda\mu}+a_{\mu\lambda}$$

$$b_{\lambda\mu\nu}=a_{\lambda\mu\nu}+a_{\mu\nu\lambda}+a_{\nu\lambda\mu}+a_{\lambda\nu\mu}+a_{\mu\lambda\nu}+a_{\nu\mu\lambda}$$

都是对称张量，

$$c_{\lambda\mu}=a_{\lambda\mu}-a_{\mu\lambda}$$

$$c_{\lambda\mu\nu}=a_{\lambda\mu\nu}+a_{\mu\nu\lambda}+a_{\nu\lambda\mu}-a_{\lambda\nu\mu}-a_{\mu\lambda\nu}-a_{\nu\mu\lambda}$$

都是反称张量。

24. 如果对于任意向量 x^λ, 张量 $a_{\lambda\mu}$, $a_{\lambda\mu\nu}$ 满足 $a_{\lambda\mu}x^\lambda x^\mu=0$, $a_{\lambda\mu\nu}x^\lambda x^\mu x^\nu=0$,则前题的 $b_{\lambda\mu}=0$, $b_{\lambda\mu\nu}=0$。特别当 $a_{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu\nu}$ 对称时，则 $a_{\lambda\mu}=0$, $a_{\lambda\mu\nu}=0$.

25. 设 $a^{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu}$ 分别对称，反称，则 $a^{\lambda\mu}b_{\lambda\mu}=0$。反之，对于任意对称张量 $a^{\lambda\mu}$, $a^{\lambda\mu}b_{\lambda\mu}=0$ 成立的张量 $b_{\lambda\mu}$ 是反称的。

26. 张量的缩短是从张量空间 $T_q{}^p$ 到 $T_{q-1}{}^{p-1}$ 的线性映射。

27. 关于各基底给定 n^3 个实数 $S^\lambda{}_{\mu\nu}$, 对于任意对称张量 $T^{\mu\nu}$, 如果 $S^\lambda{}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}=U^\lambda$ 是向量，则 $S^\lambda{}_{\mu\nu}+S^\lambda{}_{\nu\mu}$ 是张量。当 $T^{\mu\nu}$ 反称时，则 $S^\lambda{}_{\mu\nu}-S^\lambda{}_{\nu\mu}$ 是张量。

28. 设 ϕ: $V\to U$ 是线性映射，当 $x(t)$ 是V的可微分向量的集

时，则

$$\phi\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)=\frac{d}{dt}(\phi(x(t)))$$

29. 设 g，$\overline{g}$ 为V的两种度量张量，则下列命题互相等价。

(i) $g=\overline{g}$。

(ii) 对于任意 $x\in V$，$g(x, x)=\overline{g}(x, x)$。

30. 对于欧氏向量空间的任意 x，y，下列不等式成立。

$$|\langle x, y\rangle|\leqslant\|x\|\|y\| \text{（许瓦尔兹不等式）}$$

31. 如 x_1，…，x_r 互相正交，线性无关。

32. 设$\{e_\lambda\}$为标准正交基，则 $\overline{e}_\lambda=a_\lambda{}^\mu e_\mu$ 又是标准正交基的充要条件是矩阵 $A=(a_\lambda{}^\mu)$是正交 矩阵。

33. 在欧氏向量空间里，存在二阶反变张量使得关于任意标准正交基它的分量恒为 $\delta^{\lambda\mu}$。

34. 在二维数向量空间里决定度量，使 $e_1=(1, 0)$，$e_2=(1, 1)$为标准正交基。再求关于基底 $\overline{e}_1=e_1=(1, 0)$，$\overline{e}_2=(0, 1)$的度量张量的分量。

35. 在基底变换 $\overline{e}_\lambda=a_\lambda{}^\mu e_\mu$ 下，$\mathrm{g}=\det(g_{\lambda\mu})$的变换是

$$\overline{\mathrm{g}}=(\det A)^2\mathrm{g}.$$

其中设 $A=(a_\lambda{}^\mu)$。

36. 试证 $\mathrm{g}=\det(g_{\lambda\mu})>0$。

37. 对于任意张量 $T_{\lambda\mu}$，$\|T\|^2=g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}T^{\lambda\mu}T^{\alpha\beta}\geqslant0$ 成立。其中只有当 $T_{\lambda\mu}=0$ 时等号成立。

38. 在 $\det A>0$ 的基底变换下，$\varepsilon_{\lambda_1\cdots\lambda_n}=\delta^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}\sqrt{\mathrm{g}}$作反称张量的变换。

39. 在 n 维欧氏向量空间里，设$\{e_1, e_2\}$，$\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$分别为任意的标准正交系，则存在正交变换 ϕ 使得 $\phi(e_1)=\overline{e}_1$，$\phi(e_2)=\overline{e}_2$。

第二章　微分流形

§5　微分流形的定义

例题 1　对于球面 $S^n(k):(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=k^2$，$k>0$，如定义 $U_i^{\pm}(i=1,\ \cdots,\ n+1)$为

$$U_i^+=\{x\in S^n(k)\,|\,x^i>0\},\ U_i^-=\{x\in S^n(k)\,|\,x^i<0\}$$

则 $S^n(k)$ 关于相对拓扑，以$\{U_i^{\pm}\}$为决定邻域系成为微分流形。

解　根据拓扑空间论知 $S^n(k)$ 是连通豪斯道夫空间。以下讨论定义 5.1 的条件(i)～(iii)。

(i)　$\boldsymbol{U}=\{U_i^{\pm}\,|\,i=1,\ \cdots,\ n+1\}$显然是开复盖。

(ii)　例如考虑 U_{n+1}^+。在 $\boldsymbol{R}^n$ 里取开圆盘

$$O_{n+1}:(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2<k^2$$

考虑

$$\theta_{n+1}^+:p\in U_{n+1}^+\to(x^1(p),\ \cdots,\ x^n(p))\in O_{n+1}$$

则 θ_{n+1}^+ 同胚（图中的正射影）。

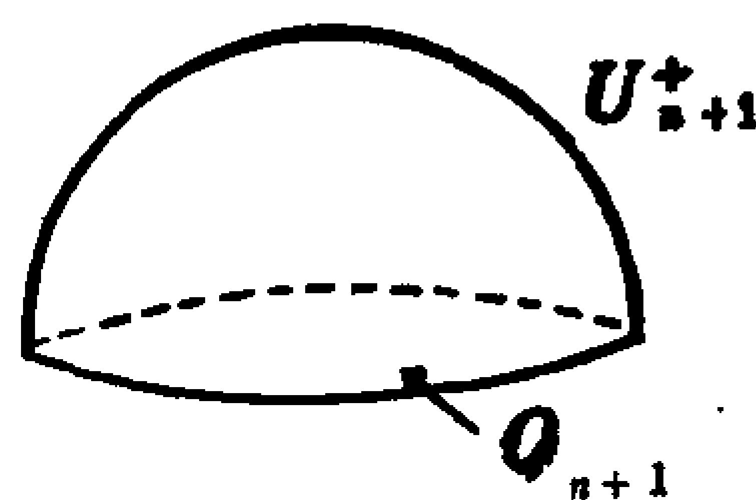


图 2

(iii)　例如在 $U_1^+\cap U_{n+1}^+$ 上考虑。

$$O_1:(x^2)^2+\cdots+(x^{n+1})^2<k^2,$$

$$\theta_1^+:U_1^+\to O_1$$

θ_1^+ 将 $p\in U_1^+$ 对应以

$$\theta_1^+(p)=(x^2(p),\ \cdots,\ x^{n+1}(p)).$$

记 $\bar{x}^1=x^2,\ \cdots,\ \bar{x}^n=x^{n+1}$，$\theta_1^+$ 是局部坐标系 $p\to\{\bar{x}^a(p)\}$，$a=1,\ \cdots,\ n$。再者 $p\in U_1^+\cap U_{n+1}^+$，$\theta_{n+1}^+\circ(\theta_1^+)^{-1}$ 是对应 $\{\bar{x}^a(p)\}\to\{x^a(p)\}$，然因

$$x^1=\{k^2-(x^2)^2-\cdots-(x^{n+1})^2\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\{k^2-(\overline{x}^1)^2-\cdots-(\overline{x}^n)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

故 $\theta^+_{n+1}\circ(\theta_1{}^+)^{-1}$ 由

$$x^1=\{k^2-(\overline{x}^1)^2-\cdots-(\overline{x}^n)^2\}^{\frac{1}{2}},$$
$$x^2=\overline{x}^1,\ \cdots,\ x^n=\overline{x}^{n-1}$$

而定，可见是 C^∞ 级的。

例题 2 关于直角坐标系 x，y，z 由 $x^2+y^2+z^2=k^2$ 给定的球面记做 $S^2(k)$，通过北极 $p_0(0, 0, k)$与$S^2(k)$上的点 $p(x,y,z)$ 的直线与 xy 平面的交点设为 $p'(u, v)$. p,p' 间的对应

$$\theta: S^2(k)-\{p_0\}\to xy\ \text{平面}$$

称为以 p_0 为中心的**极射影**.由例题 1 知 $S^2(k)$ 是微分流形，给开南半球 $U_3{}^-$ 的点 p 对应以(u, v)的坐标系 θ 是容许坐标系，以下证明之。

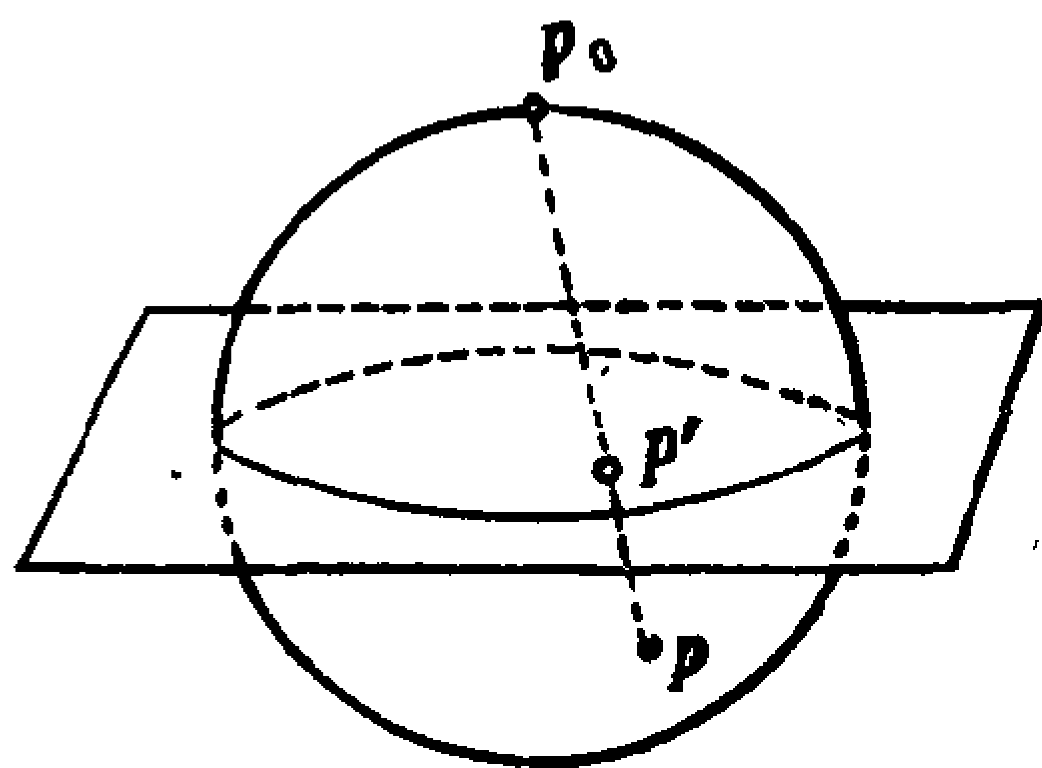


图 3

解 $U_3{}^-$ 的局部坐标系是(x, y)，因此只要证出(x,y) 与(u, v)互为 C^∞ 级函数即可。因 $\overrightarrow{p_0p'}=(u, v, -k)$，$\overrightarrow{p_0p}=(x, y, z-k)$在同一直线上，故存在实数$a$ 使得 $a\overrightarrow{p_0p'}=\overrightarrow{p_0p}$. 从而

$$(1)\qquad x=au,\ y=av,\ z=k(1-a)$$

代入 $x^2+y^2+z^2=k^2$，求 a 得

$$a=\frac{2k^2}{f},\qquad f=u^2+v^2+k^2$$

由此得

$$(2)\qquad x=\frac{2k^2u}{f},\quad y=\frac{2k^2v}{f},\quad z=\frac{k(u^2+v^2-k^2)}{f}$$

可见$(u, v)\to(x, y)$是 C^∞ 级。再将

$$a=1-\frac{z}{k}=1+\left(1-\frac{x^2+y^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

代入(1)，则 $u=x/a$，$v=y/a$，也是 C^∞ 级。

例题 3 考虑前题中的 $S^2(k)$。设 π 为通过 $p_0(0, 0, k)$ 的切平面，又设 $p'(u, v, k)$ 为通过原点 O 与开北半球 U_3^+ 的点 $p(x, y, z)$ 的直线与 π 的交点。这时 θ: $p\to(u, v)$ 的坐标系是容许坐标系。

解 因 $\overrightarrow{Op}=(x, y, z)$，$\overrightarrow{Op'}=(u, v, k)$ 在同一直线上，故有实数 l 使得

$$x=lu,\quad y=lv,\quad z=lk.$$

因 $x^2+y^2+z^2=k^2$，故

$$l=\frac{k}{\sqrt{u^2+v^2+k^2}}$$

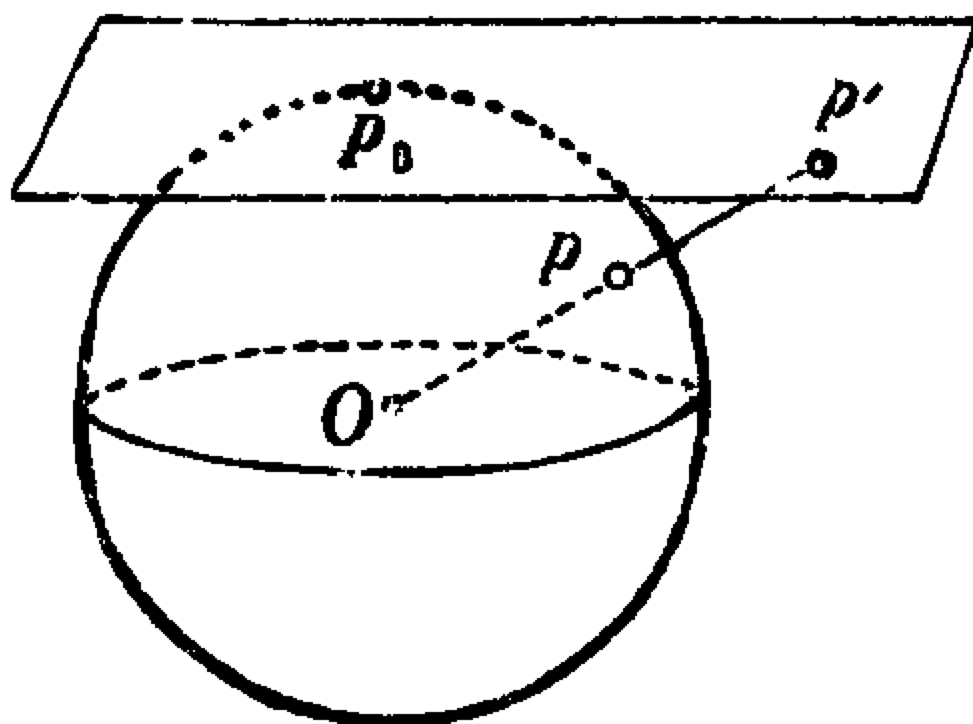


图 4

于是得

$$x=\frac{ku}{\sqrt{u^2+v^2+k^2}},\quad y=\frac{kv}{\sqrt{u^2+v^2+k^2}},$$

$$z=\frac{k^2}{\sqrt{u^2+v^2+k^2}} \qquad (1)$$

这些函数是 C^∞ 级的。另外

$$l=\frac{z}{k}=\frac{1}{k}(k^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$$

因此

$$u=\frac{kx}{\sqrt{k^2-x^2-y^2}},\quad v=\frac{ky}{\sqrt{k^2-x^2-y^2}}$$

也是 C^∞ 级。

§6 切空间

例题 1 对于 n 维微分流形 M^n，考虑以 M^n 的各点处的切向量为元之集：

$$TM=\bigcup_{p\in M}T_p(M)=\{X\mid X\in T_p(M),\ p\in M\}$$

定义对应 π: $TM \to M$ 为

$$X \in T_p(M) \subset TM \to \pi(X) = p \in M$$

称为从 TM 到M的**射影**。π 是将向量X对应于其支点，显然是在上对应。在π下 p 的整个逆象是 $\pi^{-1}(p) = T_p(M)$。

设$\{U, \theta, O, x^\lambda\}$为$M$的局部坐标，又设 $p \in U$，则 $X \in T_p(M)$ 说明

$$X = y^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_p$$

故对于 TM 的元X，决定 $2n$个实数$\{x^\lambda(p), y^\lambda\}$。反之，如给定点 p（从而 p 的坐标）与 n 个实数 y^λ，则由 $y^\lambda(\partial/\partial x^\lambda)_p$ 决定一个向量 $X \in T_p(M)$。故

$$\tilde{\theta}: \pi^{-1}(U) \to O \times \boldsymbol{R}^n$$

$$X \in \pi^{-1}(U) \to \{x^\lambda(\pi(X)), y^\lambda\}$$

是一一对应。我们规定以

$$\{\pi^{-1}(U), \tilde{\theta}, O \times \boldsymbol{R}^n, \{x^\lambda, y^\lambda\}\}$$

表示之。

人们知道，根据如下定义的拓扑，TM 变为连通豪斯道夫空间。当 $p \in \{U, O, x^\lambda\}$，$X = y^\lambda(\partial/\partial x^\lambda)_p$ 时，在 $\boldsymbol{R}^n$ 里设$\{y^\lambda\}$的任意邻域为O'，

$$\tilde{\theta}^{-1}(O \times O') \subset \pi^{-1}(U)$$

称为X的邻域。总之，坐标$\{x^\lambda, y^\lambda\}$相近的点就认为相近，定义这样拓扑。特别是

$$\tilde{\theta}^{-1}(O \times \boldsymbol{R}^n) = \pi^{-1}(U)$$

作上述准备后，证明以下事实。

设 $U = \{U_i\}$为 M^n 的决定邻域系时，则 TM 具有以 $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ 为决定邻域系的 $2n$ 维微分流形的结构。

解 讨论定义 5.1 的(i)～(iii)。

(i) $\{\pi^{-1}(U_i)\}$是 TM 的开复盖。这是因为，根据定义各 $\pi^{-1}(U_i)$是开集，再设 $X \in TM$ 为任意的元，则存在 U_i 使得 $\pi(X)$

$\in U_i$，故存在 $X\in\pi^{-1}(U_i)$的 $\pi^{-1}(U_i)$。

(ii) 在 TM 里定义着拓扑使得 $O\times R^n$ 为 R^{2n} 的开集，$\tilde{\upsilon}$为一对一，而且是同胚。

(iii) 设 $\pi^{-1}(U_i)\cap\pi^{-1}(U_j)\neq\varnothing$，则 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$。关于 $\{U_i, x^\lambda\}$，$\{U_j, x'^\lambda\}$，$X\in\pi^{-1}(U_i)\cap\pi^{-1}(U_j)$ 具有

$$X=y^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda}=y'^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu}$$

的形状，故在 $\{\pi^{-1}(U_i), \{x^\lambda, y^\lambda\}\}$，$\{\pi^{-1}(U_j), \{x'^\lambda, y'^\lambda\}\}$ 之间有以下 C^∞ 级函数关系：

$$x'^\lambda=x'^\lambda(x),\quad y'^\lambda=\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}y^\mu \tag{1}$$

注意 1 这样定义的微分流形 TM 称为M的**切丛空间**。在 $\tilde{\theta}$ 下 $\pi^{-1}(U)$与 $U\times R^n$ 同胚，故局部地 TM 可看做直积微分流形 $U\times R^n$。

注意 2 令 $y^1=x^{n+1}$，…，$y^n=x^{2n}$，将决定坐标系 $\{x^\lambda, y^\lambda\}$记做$\{x^A\}$，$A=1,\cdots,2n$。用这种记号，坐标变换 (1) 变为下列形状。

$$x'^\lambda=f^\lambda(x^1,\ \cdots,\ x^n),$$

$$x'^{n+\lambda}=y'^\lambda=f^{n+\lambda}(x^1,\ \cdots,\ x^n,\ y^1,\ \cdots,\ y^n)=f^{n+\lambda}(x^A)$$

而函数行列式为

$$\left(\frac{\partial x'^A}{\partial x^B}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} & \dfrac{\partial x'^\lambda}{\partial y^\mu}\\[2ex] \dfrac{\partial y'^\lambda}{\partial x^\mu} & \dfrac{\partial y'^\lambda}{\partial y^\mu}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} & 0\\[2ex] \dfrac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\mu\partial x^\alpha}y^\alpha & \dfrac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\end{pmatrix}$$

TM 的自然标形的变换规律如下式所示。

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}=\frac{\partial x'^A}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial x'^A}=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial x'^\mu}+\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda\partial x^\alpha}y^\alpha\frac{\partial}{\partial y'^\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial y^\lambda}=\frac{\partial x'^A}{\partial y^\lambda}\frac{\partial}{\partial x'^A}=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial y'^\mu}$$

§7 张量场

例题 1 如(1, 1)阶张量场 S 在任意的点 p 恒满足

$$S(X,\ u)=\langle X,\ u\rangle,\quad X\in T_p,\quad u\in T_p^*$$

则关于任意自然标形的分量是 $\delta_\mu{}^\lambda$。反之，关于任何自然标形存在以 $\delta_\mu{}^\lambda$ 为分量的张量场。

注意 此张量场称为**克朗纳格的德耳他**，或**单位张量**，以 $\delta_\mu{}^\lambda$ 记之。

解 设 S, X, u 的分量为 $S_\mu{}^\lambda$, ξ^λ, u_λ, 则

$$S(X,\ u)=S(\xi^\lambda\partial/\partial x^\lambda,\ u_\mu dx^\mu)=\xi^\lambda u_\mu S(\partial/\partial x^\lambda,\ dx^\mu)=\xi^\lambda u_\mu S_\lambda{}^\mu$$

$$\langle X,\ u\rangle=u_\mu dx^\mu(\xi^\lambda\partial/\partial x^\lambda)=u_\mu\xi^\lambda\delta_\lambda{}^\mu$$

故得

$$\xi^\lambda u_\mu(S_\lambda{}^\mu-\delta_\lambda{}^\mu)=0$$

对任意实数 ξ^λ, u_μ 成立，因此 $S_\lambda{}^\mu=\delta_\lambda{}^\mu$。

反之，关于各自然标形考虑 $\delta_\lambda{}^\mu$, 设

$$\bar{S}_\lambda{}^\mu=\delta_\lambda{}^\mu,\quad S_\alpha{}^\beta=\delta_\alpha{}^\beta$$

因

$$\bar{S}_\lambda{}^\mu=\frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\beta}\ \frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^\lambda}S_\alpha{}^\beta$$

成立，故 $\delta_\lambda{}^\mu$ 为张量的分量。

例题 2 设 $X=\xi^\lambda\partial/\partial x^\lambda$ 为 M^n 的向量场，那末在 TM 的各决定邻域里，以

$$\xi^\lambda,\quad \xi^{n+\lambda}=y^\alpha\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^\alpha}$$

为分量的向量场 $\tilde{X}$ 是 TM 的一个向量场。

注意 $\tilde{X}=(\xi^A)=\xi^\lambda\partial/\partial x^\lambda+\xi^{n+\lambda}\partial/\partial y^\lambda$ 称为 X 在 TM 上的**开拓**.

解 在 TM 的决定邻域系的坐标变换是

$$x'^{\lambda}=x'^{\lambda}(x),\quad y'^{\lambda}=\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}y^{\mu}$$

（参照§6 例题1）．设

$$(\xi'^{A})=\left(\xi'^{\lambda},\quad y'^{\alpha}\frac{\partial\xi'^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}}\right),\ (\xi^{B})=\left(\xi^{\lambda},\quad y^{\alpha}\frac{\partial\xi^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$

只要证出

$$\xi'^{A}=\frac{\partial x'^{A}}{\partial x^{B}}\xi^{B},\ A=1,\ \cdots,2n \tag{1}$$

成立即可。

在(1)里当 $A=\lambda$ 的情况。

$$右边=\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{B}}\xi^{B}=\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}\xi^{\mu}+\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial y^{\mu}}\xi^{n+\mu}=\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}\xi^{\mu}$$

因(ξ^{λ})是 M^{n} 的向量场，故

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}\xi^{\mu}=\xi'^{\lambda}$$

成立。

其次，在(1)里当 $A=n+\lambda$ 的情况。

$$右边=\frac{\partial x'^{n+\lambda}}{\partial x^{B}}\xi^{B}=\frac{\partial x'^{n+\lambda}}{\partial x^{\mu}}\xi^{\mu}+\frac{\partial x'^{n+\lambda}}{\partial x^{n+\mu}}\xi^{n+\mu}$$

$$=\frac{\partial^{2}x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\alpha}}y^{\alpha}\xi^{\mu}+\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}y^{\alpha}\frac{\partial\xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}=y^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}\xi^{\mu}\right)$$

$$=y^{\alpha}\frac{\partial\xi'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}=y^{\alpha}\frac{\partial x'^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}}\ \frac{\partial\xi'^{\lambda}}{\partial x'^{\varepsilon}}=y'^{\varepsilon}\frac{\partial\xi'^{\lambda}}{\partial x'^{\varepsilon}}=\xi'^{n+\lambda}$$

仍然成立。

§8 微分映射

例题 1 如S是张量场，则 $\Phi(S)$ 也是张量场。

解 证明S为(1，1)阶张量场的情况。令 $\Phi(S)=T$。因 ϕ 为微分同胚映射，故可选择 $\bar{p}=\phi(p)$ 的邻域的坐标系使得在 ϕ 下对应

点具有相同坐标。这时，$T_\lambda{}^\mu(p)=S_\lambda{}^\mu(\overline{p})$ 成立。关于坐标变换 $\{x^\lambda\}\to\{x'^\lambda\}$，在 $\overline{p}$ 的邻域里也作相同的坐标变换，则在 ϕ 下关于 $\{x'^\lambda\}$ 对应点也有相同坐标，故 $T'_\lambda{}^\mu(p)=S'_\lambda{}^\mu(\overline{p})$成立。因此得

$$T'_\lambda{}^\mu(p)=S'_\lambda{}^\mu(\overline{p})=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}S_\alpha{}^\beta(\overline{p})$$

$$=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}\ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}T_\alpha{}^\beta(p)$$

于是知 $T_\lambda{}^\mu$ 作成张量场。

例题 2 试求 π：$TM\to M^n$ 的微分映射。

解 因为 π：$\{x^\lambda,\ y^\lambda\}\to\{x^\lambda\}$，所以

$$\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^A}\right)=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^A}\ \frac{\partial}{\partial x^\lambda},\quad A=1,\ \cdots,\ 2n$$

其中 $x^{n+\lambda}=y^\lambda$（参照§6 例题1）.

然因 x^λ 与 y^μ 无关(即使 y^λ 改变，x^λ 也不改变)，故 $\partial x^\lambda/\partial x^{n+\mu}=\partial x^\lambda/\partial y^\mu=0$。因此

$$\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)=\frac{\partial}{\partial x^\mu},\quad \pi_*\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)=0.$$

注意 对于 TM 的向量场 $\xi^A\partial/\partial x^A$，在 TM 的各点$\pi_*(\xi^A\partial/\partial x^A)=\xi^A\pi_*(\partial/\partial x^A)=\xi^\lambda\partial/\partial x^\lambda$，但它在 M^n 上不一定作成向量场。原因是，一般地说 ξ^A 是 x，y 二者的函数，因此 ξ^λ 不是由 M^n 上的点唯一决定。

§9 李 微 分

例题 1 对于映射 ϕ：$N^m\to M^n$ 与 N^m 的向量场X，Y，如$\phi_*(X)$，$\phi_*(Y)$是向量场，则下式成立。

$$[\phi_*(X),\ \phi_*(Y)]=\phi_*([X,\ Y]).$$

解 设 ϕ：$x^\lambda=x^\lambda(y^a)$，$\lambda=1,\ \cdots,\ n$；$a=1,\ \cdots,\ m$。

$$X=\xi^a\partial/\partial y^a,\quad Y=\eta^a\partial/\partial y^a,$$

$$\phi_*(X)=\xi'^\lambda\partial/\partial x^\lambda,\quad \phi_*(Y)=\eta'^\lambda\partial/\partial x^\lambda$$

则

$$\xi'^\lambda=\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^a}\xi^a,\quad \eta'^\lambda=\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^a}\eta^a.$$

根据假设 $\phi_*(X)$，$\phi_*(Y)$是 M^n 的向量场，故 ξ'^λ，η'^λ 都是$\{x^\lambda\}$的函数。因此 $\partial\xi'^\lambda/\partial x^\mu$ 有意义。

因为

$$[X,\ Y]=\left(\xi^a\frac{\partial\eta^b}{\partial y^a}-\eta^a\frac{\partial\xi^b}{\partial y^a}\right)\frac{\partial}{\partial y^b}$$

所以

$$\phi_*([X,\ Y])=\left(\xi^a\frac{\partial\eta^b}{\partial y^a}-\eta^a\frac{\partial\xi^b}{\partial y^a}\right)\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^b}\ \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

另一方面

$$[\phi_*(X),\ \phi_*(Y)]=\left(\xi'^\varepsilon\frac{\partial\eta'^\lambda}{\partial x^\varepsilon}-\eta'^\varepsilon\ \frac{\partial\xi'^\lambda}{\partial x^\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

$$=\left(\xi^a\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial y^a}\ \frac{\partial\eta'^\lambda}{\partial x^\varepsilon}-\eta^a\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial y^a}\ \frac{\partial\xi'^\lambda}{\partial x^\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

然因

$$\frac{\partial\eta'^\lambda}{\partial y^a}=\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial y^a}\ \frac{\partial\eta'^\lambda}{\partial x^\varepsilon}$$

等成立，故

$$=\left(\xi^a\frac{\partial\eta'^\lambda}{\partial y^a}-\eta^a\frac{\partial\xi'^\lambda}{\partial y^a}\right)\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

$$=\left\{\xi^a\frac{\partial}{\partial y^a}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^b}\eta^b\right)-\eta^a\frac{\partial}{\partial y^a}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^b}\xi^b\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

$$=\left(\xi^a\frac{\partial\eta^b}{\partial y^a}-\eta^a\frac{\partial\xi^b}{\partial y^a}\right)\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^b}\ \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

$$=\phi_*([X,\ Y])$$

例题 2 如在各坐标邻域$\{U,\ x\}$里定义的实数值函数 $F(x)$在坐标变换$\{x^\lambda\}\to\{x'^\lambda\}$ 下恒满足

$$F(x')=(\Delta_{x,x'})^N F(x),\quad \Delta_{x,x'}=\det\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\right)$$

时，则称为**权N的相对数量函数**。

关于 M^n 上的权N的相对数量函数F，试证下列(i)，(ii)。

(i) 设 ϕ: $N^n\to M^n$ 是微分同胚映射，局部地是

$$x^\lambda=x^\lambda(y^\mu)$$

定义 ϕ^*F 为

$$(\phi^*F)(y)=(\Delta_{x,y})^N F(x(y))$$

则 ϕ^*F 在 N^n 上是权N的数量函数。

(ii) 设$\{\phi_t\}$为 M^n 的单参数变换群，则F的李微分

$$\mathcal{L}_X F=\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi_t^*F\right)_{t=0}$$

由下式而定。

$$\mathcal{L}_X F=XF+NF\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

其中 $X=(\xi^\lambda)$是$\{\phi_t\}$诱导的向量场。

解 (i) 首先验证可无矛盾地定义 ϕ^*F。设 $x'^\lambda=x'^\lambda(x)$是M^n的坐标变换，则

$$\Delta_{x,y}=\Delta_{x,x'}\Delta_{x',y}$$

故

$$(\Delta_{x',y})^N F(x')=(\Delta_{x',y})^N(\Delta_{x,x'})^N F(x)=(\Delta_{x,y})^N F(x)$$

因此 ϕ^*F 在与 M^n 的坐标系的选法无关上有意义。其次设 $y'^\lambda=y'^\lambda(y)$是 N^n 的坐标变换，则

$$\begin{aligned}(\phi^*F)(y')&=(\Delta_{x,y'})^N F(x)=(\Delta_{x,y})^N(\Delta_{y,y'})^N F(x)\\&=(\Delta_{y,y'})^N(\phi^*F)(y)\end{aligned}$$

成立，故 ϕ^*F 在 N^n 上是权N的相对数量函数。

(ii) 因为X是$\{\phi_t\}$诱导的向量场，故设

$$\phi_t:\ \bar{x}^\lambda=\bar{x}^\lambda(x,t)$$

则 $\xi^\lambda=(\partial\bar{x}^\lambda/\partial t)_{t=0}$。其次计算 $\mathcal{L}_X F$，则

$$\mathscr{L}_X F=\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi_t{}^*F\right)_{t=0}=\left[\frac{\partial}{\partial t}\{(\Delta_{\bar{x},x})^N F(\bar{x})\}\right]_{t=0}$$

$$=\left[(\Delta_{\bar{x},x})^N\frac{\partial\bar{x}^\lambda}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial\bar{x}^\lambda}+N(\Delta_{\bar{x},x})^{N-1}\frac{\partial\Delta_{\bar{x},x}}{\partial t}F(\bar{x})\right]_{t=0}$$

然而在 $t=0$，$(\Delta_{\bar{x},x})_{t=0}=1$， 故 得

$$=\xi^\lambda\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}+NF(x)\left(\frac{\partial\Delta_{\bar{x},x}}{\partial t}\right)_{t=0}$$

因此证出

$$\left(\frac{\partial\Delta_{\bar{x},x}}{\partial t}\right)_{t=0}=\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

即可．然因根据下述注意知

$$\frac{\partial\Delta_{\bar{x},x}/\partial t}{\Delta_{\bar{x},x}}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial\bar{x}^\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\lambda}\right)$$

成立，故在 $t=0$

$$\left(\frac{\partial\Delta_{\bar{x},x}}{\partial t}\right)_{t=0}=\delta_\alpha{}^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial t}\right)_{t=0}=\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

注意 n 阶矩阵 $A=(a_\mu{}^\lambda)$（λ 是行）的行列式 a 由

$$a=\det A=\delta^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}a_1{}^{\lambda_1}\cdots a_n{}^{\lambda_n}$$

而定．其中 $\delta^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}$ 是排列 λ_1，…，λ_n 的符号（参照习题一第 38 题）．设 $\Delta_\mu{}^\lambda$ 是从 A 去掉 λ 行与 μ 列剩下的 $(n-1)$ 阶子矩阵的行列式．又设 A 的各元素 $a_\mu{}^\lambda$ 是 t 的函数，对 t 的导数以 $'$ 表示之，则

$$a'=\delta^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(a_1{}^{\lambda_1})'a_2{}^{\lambda_2}\cdots a_n{}^{\lambda_n}+\delta^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}a_1{}^{\lambda_1}(a_2{}^{\lambda_2})'\cdots a_n{}^{\lambda_n}$$
$$+\cdots+\delta^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n}a_1{}^{\lambda_1}\cdots(a_n{}^{\lambda_n})' \tag{1}$$

此外，行列式关于第一列展开

$$\delta^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n} b^{\lambda_1} a_2{}^{\lambda_2}\cdots a_n{}^{\lambda_n} = \begin{vmatrix} b^1 & a_2{}^1 & \cdots & a_n{}^1 \\ b^2 & a_2{}^2 & \cdots & a_n{}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^n & a_2{}^n & \cdots & a_n{}^n \end{vmatrix}$$

$$= b^1 \varDelta_1{}^1 - b^2 \varDelta_1{}^2 + \cdots + (-1)^{n+1} b^n \varDelta_1{}^n = \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^{\lambda+1} b^\lambda \varDelta_1{}^\lambda$$

成立，因此特别当 $b^\lambda = (a_1{}^\lambda)'$ 时得

$$\delta^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_n} (a_1{}^\lambda) a_2{}^{\lambda_2}\cdots a_n{}^{\lambda_n} = \sum_{\lambda=1}^{n+1} (-1)^{\lambda+1} (a_1{}^\lambda)' \varDelta_1{}^\lambda$$

因为(1)的右边各项都可得到相同式子，所以

$$a' = \sum (a_1{}^\lambda)'(-1)^{\lambda+1} \varDelta_1{}^\lambda + \cdots + \sum (a_n{}^\lambda)'(-1)^{\lambda+n} \varDelta_n{}^\lambda$$

$$= \sum_{\lambda,\mu} (a_\mu{}^\lambda)'(-1)^{\lambda+\mu} \varDelta_\mu{}^\lambda \tag{2}$$

今设 A 为正则矩阵，又设 A 的逆矩阵为 $B = (b_\mu{}^\lambda)$，则

$$(-1)^{\lambda+\mu} \varDelta_\mu{}^\lambda = a b_\lambda{}^\mu \qquad (\lambda, \mu \text{ 不求和})$$

成立（黎曼几何 $p.9$ 的注意），故将上式代入(2)消去 $\varDelta_\mu{}^\lambda$ 可得

$$\frac{a'}{a} = (a_\mu{}^\lambda)' b_\lambda{}^\mu \tag{3}$$

当 $a_\mu{}^\lambda$ 为 $x^1, \cdots, x^n$ 的函数时同理下式成立。

$$\frac{\partial \det A / \partial x^\nu}{\det A} = \frac{\partial a_\mu{}^\lambda}{\partial x^\nu} b_\lambda{}^\mu \tag{4}$$

特别是 $a_\mu{}^\lambda = \partial \bar{x}^\lambda / \partial x^\mu$ 时，$b_\lambda{}^\mu = \partial x^\mu / \partial \bar{x}^\lambda$，故得下式。

$$\frac{\partial \varDelta_{\bar{x},x} / \partial x^\nu}{\varDelta_{\bar{x},x}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu}\right) \tag{5}$$

§10 黎曼度量

例题 1 考虑二黎曼空间 $\{M^r, g\}$，$\{M^s, \bar{g}\}$ 的直积微分流形 $M^n = M^r \times M^s$，$(n = r + s)$（参照习题二第 1 题）。在 $(p, q) \in M^n$ 处

的切空间 $T_{(p,q)}$ 与 $T_p(M^r)+T_q(M^s)$同构（参照习题二第5题），将这些等同起来，则 X，$Y\in T_{(p,q)}$ 可唯一地写做

$$X=X_1+X_2,\quad Y=Y_1+Y_2$$

$$X_1,\ Y_1\in T_p(M^r),\quad X_2,\ Y_2\in T_q(M^s)$$

的形状。现在如根据

$$G(X,\ Y)=g(X_1,\ Y_1)+\bar{g}(X_2,\ Y_2)$$

定义

$$G:T_{(p,q)}\times T_{(p,q)}\to R$$

则G为(0，2)阶张量，$\{M^n,\ G\}$变为黎曼空间。

设 M^r，M^s 的局部坐标为$\{x^i\}$，$i=1,\ \cdots,\ r$；$\{x^a\}$，$a=r+1,\ \cdots,\ n$，则$\{x^\lambda\}$，$\lambda=1,\ \cdots,\ n$ 是 M^n 的局部坐标，而G的分量 $G_{\lambda\mu}$ 由

$$G_{ij}=g_{ij},\quad G_{ia}=G_{ai}=0,\quad G_{ab}=\bar{g}_{ab}$$

而定。

注意 这样的黎曼空间$\{M^n,\ G\}$称为**直积黎曼空间**。其线素是下列形状。

$$ds^2=g_{ij}(x^k)dx^idx^j+\bar{g}_{ab}(x^c)dx^adx^b$$

解 因$\{\partial/\partial x^\lambda\}=\{\partial/\partial x^i,\ \partial/\partial x^a\}$是 $T_{(p,q)}$ 的自然标形，故由 $G_{\lambda\mu}=G(\partial/\partial x^\lambda,\ \partial/\partial x^\mu)$得$G$的分量

$$G_{ij}=G(\partial/\partial x^i,\ \partial/\partial x^j)=g(\partial/\partial x^i,\ \partial/\partial x^j)=g_{ij}$$

$$G_{ia}=G(\partial/\partial x^i,\ \partial/\partial x^a)=G(\partial/\partial x^i+0,\ 0+\partial/\partial x^a)$$

$$=g(\partial/\partial x^i,\ 0)+\bar{g}(0,\ \partial/\partial x^a)=0$$

$$G_{ab}=G(\partial/\partial x^a,\ \partial/\partial x^b)=\bar{g}_{ab}$$

显然G是(0，2)阶对称张量场。又因 g，$\bar{g}$ 是正定的，故

$$G(X,\ X)=g(X_1,\ X_1)+\bar{g}(X_2,\ X_2)\geqslant 0$$

成立，等号只在 $g(X_1,\ X_1)=\bar{g}(X_2,\ X_2)=0$ 即 $X=0$ 时成立。

例题 2 关于 E^3 的直角坐标系 x,y,z，由

$$x=(a+b\cos v)\cos u,\quad y=(a+b\cos v)\sin u$$

$$z=b\sin v,\quad a>b>0,\quad 2\pi>u,\quad v\geqslant 0$$

给定的曲面 T^2 称为环面（与黎曼几何 § 5 的例 4 同胚）．关于 T^2 的局部坐标 $u^1=u$，$u^2=v$，诱导度量由下式而定。

$$g_{11}=(a+b\cos v)^2,\ g_{12}=0,\ g_{22}=b^2$$
$$g^{11}=1/g_{11},\ g^{12}=0,\ g^{22}=1/g_{22}$$

解 $dx=-(a+b\cos v)\sin u du-b\sin v\cos u dv,$

$dy=(a+b\cos v)\cos u du-b\sin v\sin u dv,$

$dz=b\cos v dv$

故

$$\begin{aligned}&(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\\&\quad=(a+b\cos v)^2(du)^2+(b\sin v)^2(dv)^2+(b\cos v)^2(dv)^2\\&\quad=(a+b\cos v)^2(du^1)^2+b^2(du^2)^2.\end{aligned}$$

从$(du^1)^2$，du^1du^2，$(du^2)^2$ 的系数可得 $g_{\lambda\mu}$。

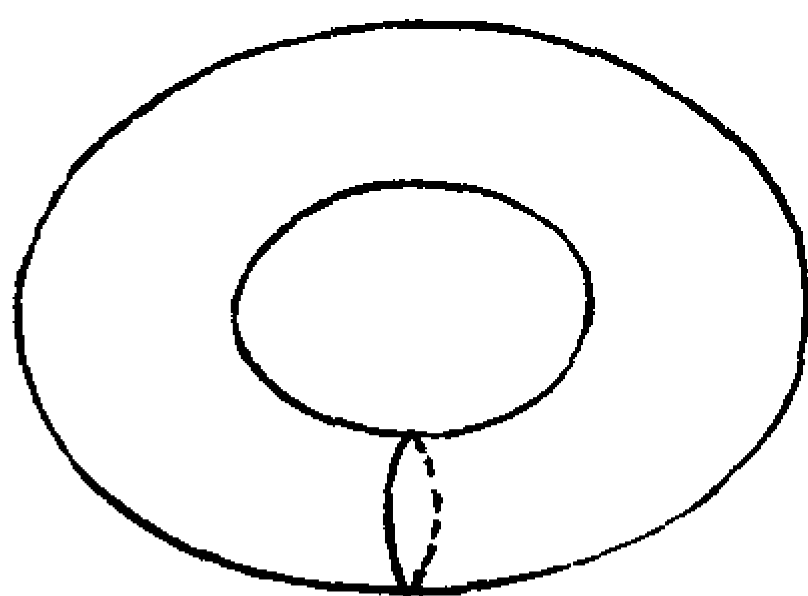


图 5

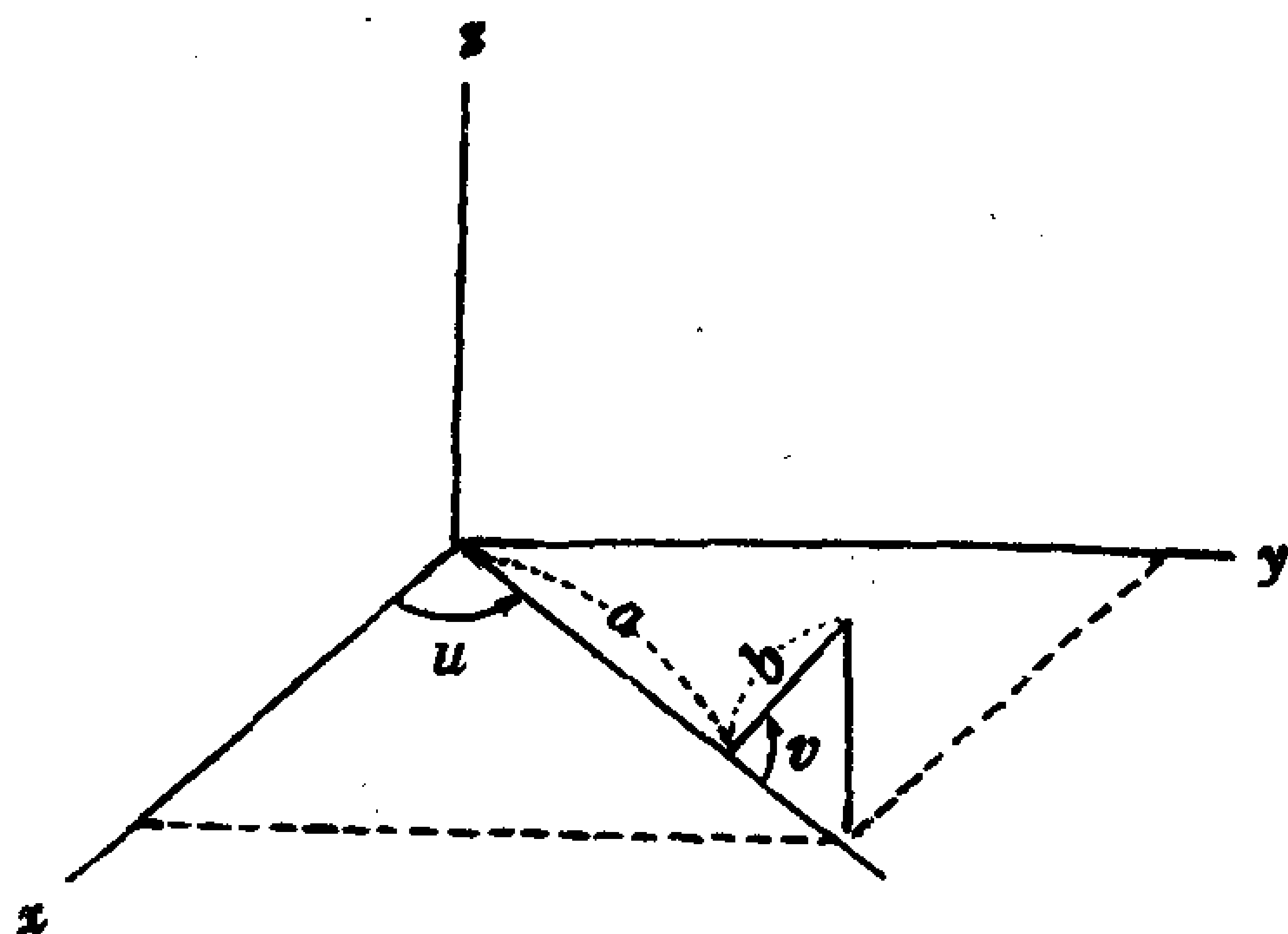


图 6

注意 给定的 T^2 在 E^3 中是图 5 的形状，参数 u，v 如图 6 所取。u,v 在$0<u<2\pi$，$0<v<2\pi$ 的范围内是局部坐标系（是开集，与 E^2 的正方形内部同胚）.又因在$-\pi<u<\pi$，$-\pi<v<\pi$ 上也是局部坐标系，故 g_{11}，g^{22} 等即使在 $v=0$ 也正确。在考虑其他曲面时也可作这种注意。

例题 3 关于 TM 的决定坐标系 $\{x^A\}$，分量为

$$\eta_\lambda = g_{\lambda\alpha} y^\alpha, \quad \eta_{n+\lambda} = 0$$

的共变向量 η_A 在 TM 全体上作成共变向量场（参照§6 例题1，§7 例题2）。

解 TM 的坐标变换$\{x^A\} \to \{x'^A\}$是

$$x'^\lambda = x'^\lambda(x), \quad y'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} y^\mu$$

的形状。令 $\eta'_\lambda = g'_{\lambda\alpha} y'^\alpha$，$\eta'_{n+\lambda} = 0$，能证出 η_A，η'_A 满足

$$\eta_A = \frac{\partial x'^B}{\partial x^A} \eta'_B$$

即可。

当 $A = \lambda$ 时，右边是

$$\frac{\partial x'^B}{\partial x^\lambda} \eta'_B = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \eta'_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} g'_{\mu\beta} y'^\beta$$

$$= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} g'_{\mu\beta} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} y^\alpha = g_{\lambda\alpha} y^\alpha = \eta_\lambda$$

当 $A = n + \lambda$ 时，注意 $\partial x'^\lambda / \partial y^\mu = 0$，则

$$\frac{\partial x'^B}{\partial x^{n+\lambda}} \eta'^B = \frac{\partial x'^\mu}{\partial y^\lambda} \eta'_\mu = 0 = \eta_{n+\lambda}.$$

故 η 是 TM 上的整体共变向量场。

习 题 二

1. 设 M^n，N^m 为微分流形，它们的决定邻域系分别为

$$\{\theta_i, U_i, O_i, x_i^\lambda\}, \{\omega_j, V_j, O_j', y_j^\alpha\}$$

现在定义

$$\theta_i \times \omega_j : U_i \times V_j \to O_i \times O_j'$$

为

$$(\theta_i \times \omega_j)(p, q) = (\theta_i(p), \omega_j(q))$$

则 $M^n \times N^m$ 变为以$\{\theta_i \times \omega_j, U_i \times V_j, O_i \times O_j', \{x_i^\lambda, y_j^\alpha\}\}$为决定邻域系的微分流形。

2. 在球面 $S^n(k)$ 上，将其直径对点 $x=(x^1, \cdots, x^{n+1})$ 与 $x'=(-x^1, \cdots, -x^{n+1})$ 看做一点而得点集称为 n 维射影空间 $P^n(k)$。根据微分流形 $S^n(k)$ 的结构（参照§5 例题1）可使 $P^n(k)$ 自然地成为微分流形。试述理由。

3. 如拓扑空间的任意两点可用连续曲线连结之，则空间称为**弧连通**的。试证（连通的）C^0 级流形是弧连通。

4. 设 f, g 是在 p 的邻域里定义的函数，$X \in T_p(M)$，$a, b \in R$，则下式成立。

$$X(af+bg)=aXf+bXg, \quad X(fg)=(Xf)g+fXg.$$

5. 对于直积微分流形 $M^n \times N^m$，试自然地定义同构对应：

$$T_p(M)+T_q(N) \to T_{(p,q)}(M \times N)$$

6. 对于切丛空间 TM，

(i) 射影 π: $TM \to M^n$ 是 C^∞ 级映射。

(ii) M^n 上的向量场 X 是

$X: M^n \to TM$，$\pi \cdot X = I$（恒等映射）的映射。

7. 关于曲线 $c: x^\lambda = x^\lambda(t)$，$d^2x^\lambda/dt^2$ 在坐标变换下不满足向量分量的变换规律。

8. 在$\{U, x^\lambda\}$里，设 X 为任意向量，则

$$Xx^\lambda = \langle dx^\lambda, X \rangle$$

9. 由向量场 $X=\xi^\lambda \partial/\partial x^\lambda$，$u=u_\lambda dx^\lambda$ 的分量作成的 $\partial\xi^\lambda/\partial x^\mu$，$\partial u_\lambda/\partial x^\mu$ 不是张量场的分量。但 $\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial x^\mu}-\dfrac{\partial u_\mu}{\partial x^\lambda}$ 是张量场的分量。

10. 关于 M^n 的坐标邻域的一开复盖 U，如坐标变换总是

$$x'^i = x'^i(x^1, \cdots, x^r), \quad i=1, \cdots, r,$$

$$x'^a = x'^a(x^{r+1}, \cdots, x^n), \quad a=r+1, \cdots, n$$

的形状，则关于 U 的各坐标系，以

$$(h_\mu{}^\lambda)=\begin{pmatrix} \delta_j{}^i & 0 \\ 0 & -\delta_b{}^a \end{pmatrix}$$

为分量的张量在 M^n 全体上作成一个张量场。

注意．这样的张量场h称为**局部乘积结构**（或给定局部乘积结构的张量）．

11． 关于任意张量S，T与a，$b\in R$，

（i） $\Phi(aS+bT)=a\Phi(S)+b\Phi(T)$，

（ii） $\Phi(ST)=\Phi(S)\Phi(T)$，

（iii） Φ与缩短可交换．

12． 设R的自然标形为d/dt，则关于M^n的曲线c，

$$c_*(d/dt)=\dot{c}$$

13． 如$\phi:N\to M$，$\psi:M\to P$是微分同胚映射，则$\Theta=\Phi\circ\Psi$成立．其中Θ是从$\theta=\psi\circ\phi$诱导的张量空间的同构映射．

14． 如定义$i:M^n\to TM$为$i(p)=0\in T_p(M)$，则$i(M^n)$是TM的n维曲面．

15． 以

$$\theta:X=y^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\in T_p(M)\to(y^1,\cdots,y^n)\in R^n$$

为唯一的坐标系$\{\theta,T_p,R^n,y^\lambda\}$，则切空间$T_p(M)$是$n$维微分流形．故可考虑在$X\in T_p(M)$处的切空间$T_X(T_p(M))$．对于$T_p(M)$的曲线

$$\lambda:\lambda(t)=X+tY,\ X,\ Y\in T_p(M)$$

令

$$\mathfrak{J}_X(Y)=\lambda_*\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}=\dot{\lambda}(0)$$

则$\mathfrak{J}_X$是同构映射：

$$\mathfrak{J}_X:T_p(M)\to T_X(T_p(M))$$

注意 这样定义的微分流形$T_p(M)$是（§6 例题1的）切丛空间TM的n维子空间里具有相对拓扑者．$\mathfrak{J}_X$称为**标准同构映射**．直观地讲是平行移动．

16.映射$\phi:N^m\to M^n$的微分映射ϕ_*是从切丛空间TN到TM的映射，

$$\pi_M\circ\phi_*=\phi\circ\pi_N$$

成立。其中 π_N, π_M 分别是 TN, TM 的射影。

17. 关于数量函数，$\mathscr{L}_X f = \xi^\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha} = Xf$。

18. 关于自然标形，

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda},\ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right] = 0$$

19. 作坐标变换验证向量场 X, Y 的交换子积 $[X, Y]$ 也是向量场。

20. 关于向量场 X, Y, Z 与数量函数 f，下式成立。

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$。

(ii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$。

(iii) $[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X$。

注意 设关于向量空间 V 给定多重线性映射 $\phi: V \times V \to V$。规定以 $[X, Y]$ 表示 $\phi(X, Y)$。如果它满足上记性质 (i), (ii)，就说 V 关于 ϕ 作成**李代数**。微分流形 M^n 上的向量场的全体关于由李导数定义的交换子积 $[\ ,\ ]$ 作成李代数。

21. 在向量场 X 生成的单参数变换群 $\{\phi_t\}$ 下，向量场 Y 的积分曲线恒变为积分曲线的充要条件是 $\mathscr{L}_X Y = 0$。

22. 克朗纳格的德耳他 $I = (\delta_\mu{}^\lambda)$ 关于任意向量场 X 的李导数是 0：$\mathscr{L}_X I = 0$。

23. 李微分是微分算子。即关于任意张量 S, T 与 a, $b \in R$

(i) $\mathscr{L}_X(aS + bT) = a\mathscr{L}_X S + b\mathscr{L}_X T$,

(ii) $\mathscr{L}_X(ST) = (\mathscr{L}_X S)T + S\mathscr{L}_X T$.

24. 李微分与缩短可交换。

25. 设 $[\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y] = \mathscr{L}_X\mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y\mathscr{L}_X$，则

$$\mathscr{L}_{[X,Y]} = [\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y]$$

26. 设 $h = (h_\mu{}^\lambda)$ 是 (1, 1) 阶张量场，则 h 决定对应

$$h: X = (\xi^\lambda) \to hX = (h_\mu{}^\lambda \xi^\mu)$$

现在设 h, k 都是 (1, 1) 阶张量场，对于任意的向量场 X, Y 定义

$\{h,\ k\}$为

$$\{h,k\}(X,Y)=(1/2)(hk[X,Y]+kh[X,Y]+[hX,kY] +[kX,hY]-h[X,kY]-k[X,hY] -h[kX,Y]-k[hX,Y]) \tag{1}$$

这时可写做

$$\{h,k\}(X,Y)=N(h,k)_{\lambda\mu}{}^{\kappa}\xi^{\lambda}\eta^{\mu}\partial x^{\kappa} \tag{2}$$

其中 $N(h,k)_{\lambda\mu}{}^{\kappa}$ 是由下式给定的量。

$$2N(h,k)_{\lambda\mu}{}^{\kappa}=h_{\lambda}{}^{\varepsilon}\frac{\partial k_{\mu}{}^{\kappa}}{\partial x^{\varepsilon}}-k_{\mu}{}^{\varepsilon}\frac{\partial h_{\lambda}{}^{\kappa}}{\partial x^{\varepsilon}}+k_{\lambda}{}^{\varepsilon}\frac{\partial h_{\mu}{}^{\kappa}}{\partial x^{\varepsilon}} -h_{\mu}{}^{\varepsilon}\frac{\partial k_{\lambda}{}^{\kappa}}{\partial x^{\varepsilon}}-h_{\varepsilon}{}^{\kappa}\left(\frac{\partial k_{\mu}{}^{\varepsilon}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial k_{\lambda}{}^{\varepsilon}}{\partial x^{\mu}}\right) -k_{\varepsilon}{}^{\kappa}\left(\frac{\partial h_{\mu}{}^{\varepsilon}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial h_{\lambda}{}^{\varepsilon}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

注意 从(2)的形状可知$\{h,k\}$是(1,2)阶张量场，$N(h,k)_{\lambda\mu}{}^{\kappa}$ 为其分量。特别当 $h=k$ 时得

$$\{h,h\}(X,Y)=h^2[X,Y]+[hX,hY] -h[X,hY]-h[hY,Y] \tag{3}$$

其分量记做 $N(h)_{\lambda\mu}{}^{\kappa}$，则得

$$N(h)_{\lambda\mu}{}^{\kappa}=h_{\lambda}{}^{\varepsilon}\frac{\partial h_{\mu}{}^{\kappa}}{\partial x^{\varepsilon}}-h_{\mu}{}^{\varepsilon}\frac{\partial h_{\lambda}{}^{\kappa}}{\partial x^{\varepsilon}}-h_{\varepsilon}{}^{\kappa}\left(\frac{\partial h_{\mu}{}^{\varepsilon}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial h_{\lambda}{}^{\varepsilon}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

称此张量为**奈因亥斯**(*Nijenhuis*)**张量**。

27. $\{h+k,h+k\}=\{h,h\}+2\{h,k\}+\{k,k\}$

28. 关于任意的X，Y，

$$(\mathcal{L}_{hX}h-h\mathcal{L}_{X}h)Y=\{h,h\}(X,Y)$$

成立。式中左边表示在(　)中的(1,1)阶张量下Y的象。

29. 在 E^n 里，关于直交坐标系分量为 $\delta_{\lambda\mu}$ 的度量张量 g_0 关于平行坐标系的分量是常数。

30. 在黎曼空间的一点 p 存在局部坐标系使得 $g_{\lambda\mu}(p)=\delta_{\lambda\mu}$。

31. 设 g，g' 分别为微分流形 M^n 的黎曼度量，则 g/g' 为数

量函数。其中设 $\mathrm{g}=\det(g_{\lambda\mu})$， $\mathrm{g}'=\det(g'_{\lambda\mu})$。

32. 半径 k 的球面 $S^n(k)$ 上的诱导度量 $\bar{g}$ 在 $U^{\pm}_{n+1}$ 上由下式决定（参照§5例题1）。

$$\bar{g}_{ab}=\delta_{ab}+\frac{x^a x^b}{(x^{n+1})^2}=\delta_{ab}+\frac{x^a x^b}{k^2-\{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2\}}$$

33. 关于 E^4 的直交坐标系 x^1，x^2，x^3，x^4，由

$$\begin{aligned} &x^1=\cos u^1, \quad x^2=\sin u^1, \\ &x^3=\cos u^2, \quad x^4=\sin u^2, \end{aligned} \qquad 0\leqslant u^1,\ u^2\leqslant 2\pi,$$

决定的二维曲面（与§10 例题2的环面 T^2 同胚）上的诱导度量是 $ds^2=(du^1)^2+(du^2)^2$。

第三章　黎曼空间

§11　平行性*

例题 1　关于自然标形 $X_\lambda=\partial/\partial x^\lambda$，下式成立。

$$\nabla_{X_\lambda}X_\mu=\Gamma_{\lambda\ \mu}^{\ \varepsilon}X_\varepsilon$$

解　因为 $X_\lambda=\dfrac{\partial}{\partial x^\lambda}=\delta_\lambda{}^\alpha\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$，所以 X_λ 的分量为 $\delta_\lambda{}^\alpha$。（固定 λ 来考虑）．向

$$\nabla_XY=\xi^\alpha\left(\frac{\partial\eta^\varepsilon}{\partial x^\alpha}+\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon}\eta^\beta\right)\frac{\partial}{\partial x^\varepsilon}$$

代入 $\xi^\alpha=\delta_\lambda{}^\alpha$，$\eta^\varepsilon=\delta_\mu{}^\varepsilon$ 得

$$\nabla_{X_\lambda}X_\mu=\delta_\lambda{}^\alpha\left(\frac{\partial\delta_\mu{}^\varepsilon}{\partial x^\alpha}+\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon}\delta_\mu{}^\beta\right)\frac{\partial}{\partial x^\varepsilon}=\Gamma_{\lambda\ \mu}^{\ \varepsilon}X_\varepsilon$$

例题 2　道路 $x^\lambda=x^\lambda(t)$关于任意参数 τ 是

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2}+\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \lambda}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=\alpha(\tau)\frac{dx^\lambda}{d\tau}\tag{1}$$

类型的微分方程的解。

解　关于仿射参数 t，道路是

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}+\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \lambda}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0\tag{2}$$

的解。将

$$\frac{dx^\lambda}{dt}=\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{d\tau}{dt},\quad\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}=\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2+\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{d^2\tau}{dt^2}$$

代入(2)得

---

* 仿射联络不假设对称性。

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=-\frac{\dfrac{d^2\tau}{dt^2}}{\left(\dfrac{d\tau}{dt}\right)^2}\frac{dx^\lambda}{d\tau}$$

变成(1)的形状。

反之，给定(1)式时，使用满足

$$\alpha(\tau)=-\frac{\dfrac{d^2\tau}{dt^2}}{\left(\dfrac{d\tau}{dt}\right)^2}=-\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\dfrac{dt}{d\tau}}\right)=\frac{\dfrac{d^2t}{d\tau^2}}{\dfrac{dt}{d\tau}} \tag{3}$$

的 t，则(1)变为(2)的形状。

可见，求(3)的解得仿射参数

$$t=c_1\int e^{\int\alpha d\tau}d\tau+c_2$$

例题 3 设 X，Y 为 M^n 的向量场而且 $X_p\neq 0$。通过 p 的 X 的积分曲线以 $c(s)$ 记之，沿 c 从点 $c(t)$ 到 $p=c(0)$ 的平行移动以 c_t^{-1} 记之，则

$$(\nabla_XY)_p=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(c_t^{-1}Y_{c(t)}-Y_p)$$

成立。

解 固定 $t>0$，设 Z 为将 $Y_{c(t)}$ 从 $c(t)$ 平行移动到 $c(s)$，在 $0\leqslant s\leqslant t$ 的范围内得到平行向量场。特别是

$$Z_p=c_t^{-1}Y_{c(t)}\in T_p(M)$$

Z，Y 分别可写做

$$Z_{c(s)}=\zeta^\lambda(s)\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_{c(s)},\quad Y_{c(s)}=\eta^\lambda(s)\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_{c(s)}$$

的形状，从 Z 的作法可见 $\zeta^\lambda(s)$ 满足

$$\zeta^\lambda(t)=\eta^\lambda(t) \tag{1}$$

$$\frac{d\zeta^\lambda}{ds}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\zeta^\nu=0 \tag{2}$$

根据中值定理得

$$\zeta^{\lambda}(t)=\zeta^{\lambda}(0)+t\left(\frac{d\zeta^{\lambda}}{ds}\right)_{s=t^*},\quad 0<t^*<t \tag{3}$$

故从(2)，(3)得

$$\frac{1}{t}(\zeta^{\lambda}(0)-\eta^{\lambda}(0))=\frac{1}{t}\left\{\zeta^{\lambda}(t)-t\left(\frac{d\zeta^{\lambda}}{ds}\right)_{s=t^*}-\eta^{\lambda}(0)\right\}$$

$$=\frac{1}{t}\left\{\zeta^{\lambda}(t)-\eta^{\lambda}(0)+t\left(\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\zeta^{\nu}\right)_{s=t^*}\right\}$$

令 $t\to 0$，则从(1)与 $\zeta^{\lambda}(t^*)\to\eta^{\lambda}(0)$得

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\zeta^{\lambda}(0)-\eta^{\lambda}(0))=\left(\frac{d\eta^{\lambda}}{dt}+\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\eta^{\nu}\right)_{t=0}$$

例题 4 如张量场 $h_{\lambda}{}^{\kappa}$ 在 M^n 的各点作成的矩阵 $H=(h_{\lambda}{}^{\kappa})$正则时，则称为**正则张量场**。正则的 $h_{\lambda}{}^{\kappa}$ 在各点决定同构对应：

$$H:T_p(M)\to T_p(M),\quad X=(\xi^{\lambda})\to H(X)=(h_{\alpha}{}^{\kappa}\xi^{\alpha})$$

现在设 $K=(k_{\lambda}{}^{\kappa})=H^{-1}$，由

$$\overline{\nabla}_X Y=K(\nabla_X H(Y))$$

定义 $\overline{\nabla}$。这时试证以下各命题。

(i) $\overline{\nabla}$ 在 M^n 上给定一个仿射联络 $\overline{\Gamma}$，而且

$$\overline{\Gamma}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}=\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}+k_{\alpha}{}^{\lambda}\nabla_{\mu}h_{\nu}{}^{\alpha}$$

成立（称为由 Γ 经 h 变形而得的仿射联络）。

(ii) $$\overline{\nabla}_{\lambda}h_{\mu}{}^{\kappa}=k_{\varepsilon}{}^{\kappa}(\nabla_{\lambda}h_{\alpha}{}^{\varepsilon})h_{\mu}{}^{\alpha}$$

(iii) $$\overset{*}{\Gamma}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}=(1/2)(\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}+\overline{\Gamma}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu})=\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}+(1/2)k_{\alpha}{}^{\lambda}\nabla_{\mu}h_{\nu}{}^{\alpha}$$

也是仿射联络（称为关于 h，Γ 的**平均仿射联络**）。

(iv) 如 $H^2=\varepsilon I$，($\varepsilon=\pm 1$)，即

$$h_{\alpha}{}^{\lambda}h_{\mu}{}^{\alpha}=\pm\delta_{\mu}{}^{\lambda}$$

成立时，则

$$\overset{*}{\nabla}_{\lambda}h_{\mu}{}^{\kappa}=0$$

解 (i) 计算 $K(\nabla_X H(Y))$ 的分量得

$$k_\varepsilon{}^\kappa\xi^\lambda\nabla_\lambda(h_\mu{}^\varepsilon\eta^\mu)$$

$$=k_\varepsilon{}^\kappa\xi^\lambda\left(\frac{\partial h_\mu{}^\varepsilon}{\partial x^\lambda}\eta^\mu+h_\mu{}^\varepsilon\frac{\partial\eta^\mu}{\partial x^\lambda}+\Gamma_\lambda{}^\varepsilon{}_\nu h_\mu{}^\nu\eta^\mu\right)$$

$$=\xi^\lambda\left\{\frac{\partial\eta^\kappa}{\partial x^\lambda}+k_\varepsilon{}^\kappa\left(\frac{\partial h_\mu{}^\varepsilon}{\partial x^\lambda}+\Gamma_\lambda{}^\varepsilon{}_\nu h_\mu{}^\nu\right)\eta^\mu\right\}$$

于式中令

$$\overline{\Gamma}_\lambda{}^\kappa{}_\mu=k_\varepsilon{}^\kappa\left(\frac{\partial h_\mu{}^\varepsilon}{\partial x^\lambda}+\Gamma_\lambda{}^\varepsilon{}_\nu h_\mu{}^\nu\right)$$

经整理可得

$$\overline{\Gamma}_\lambda{}^\kappa{}_\mu=\Gamma_\lambda{}^\kappa{}_\mu+k_\alpha{}^\kappa\nabla_\lambda h_\mu{}^\alpha$$

因 $k_\alpha{}^\kappa\nabla_\lambda h_\mu{}^\alpha$ 为(1,2)阶张量场，故 $\overline{\Gamma}_\lambda{}^\kappa{}_\mu$ 也是仿射联络（参照习题三第5题）。

(ii)
$$\overline{\nabla}_\lambda h_\mu{}^\kappa=\frac{\partial h_\mu{}^\kappa}{\partial x^\lambda}+\overline{\Gamma}_\lambda{}^\kappa{}_\varepsilon h_\mu{}^\varepsilon-\overline{\Gamma}_\lambda{}^\varepsilon{}_\mu h_\varepsilon{}^\kappa$$

$$=\nabla_\lambda h_\mu{}^\kappa+k_\alpha{}^\kappa(\nabla_\lambda h_\varepsilon{}^\alpha)h_\mu{}^\varepsilon-k_\alpha{}^\varepsilon(\nabla_\lambda h_\mu{}^\alpha)h_\varepsilon{}^\kappa$$

$$=k_\alpha{}^\kappa(\nabla_\lambda h_\varepsilon{}^\alpha)h_\mu{}^\varepsilon$$

(iii) 显然。

(iv) 在 $H^2=\varepsilon I$ 的两边乘以 K 得 $H=\varepsilon K$，即 $k_\lambda{}^\kappa=\varepsilon h_\lambda{}^\kappa$

又因 $h_\alpha{}^\kappa h_\varepsilon{}^\alpha=\varepsilon\delta_\varepsilon{}^\kappa$ 成立，故求共变导数得

$$h_\alpha{}^\kappa\nabla_\lambda h_\varepsilon{}^\alpha+(\nabla_\lambda h_\alpha{}^\kappa)h_\varepsilon{}^\alpha=0 \tag{1}$$

因此由(ii)与(1)得

$$\overline{\nabla}_\lambda h_\mu{}^\kappa=\varepsilon h_\alpha{}^\kappa(\nabla_\lambda h_\varepsilon{}^\alpha)h_\mu{}^\varepsilon=-\varepsilon(\nabla_\lambda h_\alpha{}^\kappa)h_\varepsilon{}^\alpha h_\mu{}^\varepsilon$$

$$=-\nabla_\lambda h_\mu{}^\kappa$$

$$\therefore\quad \overset{*}{\nabla}_\lambda h_\mu{}^\kappa=\frac{\partial h_\mu{}^\kappa}{\partial x^\lambda}+\overset{*}{\Gamma}_\lambda{}^\kappa{}_\varepsilon h_\mu{}^\varepsilon-\overset{*}{\Gamma}_\lambda{}^\varepsilon{}_\mu h_\varepsilon{}^\kappa$$

$$=(1/2)(\nabla_\lambda h_\mu{}^\kappa+\overline{\nabla}_\lambda h_\mu{}^\kappa)=0$$

注意 满足 $H^2=I$ 而且 $H\neq I$ 的 H 称为**概乘积结构**，满足 $H^2=-I$ 的 H 称为**概复结构**（给定概复结构的张量）。

例题 5 关于仿射联络空间 M^n 的切丛空间 TM 的决定邻域系

（参照§6 例题1），在 TM 的各点的 $2n$ 维切空间中，n 个向量

$$B_{(\lambda)}=\frac{\partial}{\partial x^\lambda}-\Gamma_{\lambda\varepsilon}^{\alpha}y^\varepsilon\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\quad \lambda=1,\cdots,n$$

张成的 n 维平面称为**水平面**。

（i） 在坐标变换$\{x^\lambda,y^\lambda\}\to\{x'^\lambda,y'^\lambda\}$下

$$B_{(\lambda)}=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}B'_{(\mu)}$$

成立（因此，水平面与局部坐标系无关地决定下来）。

（ii） TM 的曲线 $x^A=x^A(t)$，$A=1,\cdots,2n$，的切向量恒属于水平面的条件是

$$\frac{dy^\kappa}{dt}+\frac{dx^\lambda}{dt}\Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa}y^\mu=0$$

（这样曲线称为**水平曲线**）。

解 （i）在 $x^A=\{x^\lambda,y^\lambda\}\to x'^A=\{x'^\lambda,y'^\lambda\}$ 下，TM 的自然标形 $\partial/\partial x^A$ 变化如下（参照§6 例题1）。

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial x'^\mu}+\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda\partial x^\alpha}y^\alpha\frac{\partial}{\partial y'^\mu},$$

$$\frac{\partial}{\partial y^\lambda}=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial y'^\mu}$$

因此得

$$\begin{aligned}B_{(\lambda)}&=\frac{\partial}{\partial x^\lambda}-\Gamma_{\lambda\varepsilon}^{\alpha}y^\varepsilon\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\\&=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial x'^\mu}+\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda\partial x^\alpha}y^\alpha\frac{\partial}{\partial y'^\mu}-\Gamma_{\lambda\varepsilon}^{\alpha}y^\varepsilon\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial y'^\mu}\\&=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial x'^\mu}+\left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda\partial x^\varepsilon}-\Gamma_{\lambda\varepsilon}^{\alpha}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\right)y^\varepsilon\frac{\partial}{\partial y'^\mu}\\&=\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x'^\rho}-\Gamma'^{\mu}_{\rho\sigma}y'^\sigma\frac{\partial}{\partial y'^\mu}\right)=\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\lambda}B'_{(\rho)}\end{aligned}$$

故在 TM 的各点，$B_{(\lambda)}$ 与 $B'_{(\rho)}$ 互相是另一个的线性组合，因此水平

面具有与坐标系的选法无关的意义。

(ii) 将曲线 $x^A(t)$的切向量 $\dot{x}^A$ 是 $B_{(\lambda)}$ 的线性组合的条件

$$\dot{x}^A\frac{\partial}{\partial x^A}=\xi^\lambda B_{(\lambda)} \tag{1}$$

详细写之得

$$\dot{x}^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+\dot{y}^\lambda\frac{\partial}{\partial y^\lambda}=\xi^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}-\Gamma_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\varepsilon}y^\varepsilon\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)$$

因为$\{\partial/\partial x^\lambda,\ \partial/\partial y^\lambda\}$是基底，所以两边的对应系数相等：

$$\dot{x}^\lambda=\xi^\lambda,\quad \dot{y}^\lambda=-\xi^\alpha\Gamma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\varepsilon}y^\varepsilon$$

从两式消去 ξ^λ 可得下式。

$$\dot{y}^\lambda+\dot{x}^\alpha\Gamma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\varepsilon}y^\varepsilon=0 \tag{2}$$

反之，如果关于 $x^A=x^A(t)$，(2)成立，那末令 $\dot{x}^\lambda=\xi^\lambda$ 便得(1)的形状。

§12 黎曼联络

例题 1 设 $\mathrm{g}=\det(g_{\lambda\mu})$，$X=\xi^\lambda\partial/\partial x^\lambda$，则下式成立。

(i) $$\left\{{\alpha \atop \lambda\alpha}\right\}=\frac{1}{2\mathrm{g}}\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial x^\lambda}=\frac{\partial\log\sqrt{\mathrm{g}}}{\partial x^\lambda}$$

(ii) $$\mathrm{div}X=\nabla_\lambda\xi^\lambda=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\frac{\partial(\sqrt{\mathrm{g}}\,\xi^\lambda)}{\partial x^\lambda}$$

$\mathrm{div}X$ 称为 X 的**散度**。

解 因

$$\left\{{\nu \atop \lambda\mu}\right\}=\frac{1}{2}g^{\nu\varepsilon}\left(\frac{\partial g_{\lambda\varepsilon}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\mu\varepsilon}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\varepsilon}\right)$$

故得

$$\left\{{\alpha \atop \lambda\alpha}\right\}=\frac{1}{2}g^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial g_{\alpha\varepsilon}}{\partial x^\lambda}$$

然而根据§9例题2的注意知道，一般地说对于正则矩阵 $A=(a_\lambda{}^\mu(x))$

与逆矩阵 $B=(b_\lambda{}^\mu)$，

$$\frac{\dfrac{\partial \det A}{\partial x^\lambda}}{\det A}=b_\lambda{}^\mu\frac{\partial a_\mu{}^\lambda}{\partial x^\nu}$$

成立。因为$(g_{\lambda\mu})$与$(g^{\lambda\mu})$是逆矩阵，所以

$$g^{\alpha\varepsilon}\frac{\partial g_{\alpha\varepsilon}}{\partial x^\lambda}=\frac{\dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial x^\lambda}}{\mathrm{g}}$$

故得(i)。其次是

$$\mathrm{div}X=\nabla_\lambda\xi^\lambda=\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^\lambda}+\begin{Bmatrix}\lambda\\ \lambda\alpha\end{Bmatrix}\xi^\alpha$$

$$=\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\alpha}+\frac{1}{2\mathrm{g}}\frac{\partial\mathrm{g}}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\frac{\partial(\sqrt{\mathrm{g}}\xi^\alpha)}{\partial x^\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\left(\sqrt{\mathrm{g}}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\alpha}+\xi^\alpha\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{g}}}\frac{\partial\mathrm{g}}{\partial x^\lambda}\right)$$

故得(ii)。

注意　g 是权 2 相对数量（参照 § 9 例题 2，习题二第 31 题），故由 p. 23 可见下式成立。

$$\mathscr{L}_X\mathrm{g}=X\mathrm{g}+2\mathrm{g}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\alpha}=2\mathrm{g}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\alpha}+\frac{1}{2\mathrm{g}}\frac{\partial\mathrm{g}}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha\right)=2\mathrm{g}\,\mathrm{div}X$$

例题 2　在黎曼空间里设 $\Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu$ 为任意仿射联络，T 为(1,2)阶张量场。这时

$$L_\mu{}^\lambda{}_\nu=\Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu+T_{\mu\nu}{}^\lambda$$

为度量联络的条件是

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu}=T_{\lambda\mu\nu}+T_{\lambda\nu\mu}\qquad(1)$$

式中 ∇ 表示关于 Γ 的共变导数，又设 $T_{\lambda\mu\nu}=T_{\lambda\mu}{}^\varepsilon g_{\varepsilon\nu}$

特别是满足 $T_{\mu\nu}{}^\lambda=T_{\nu\mu}{}^\lambda$ 的 T 唯一地决定：

$$T_{\mu\nu}{}^\lambda=(1/2)g^{\lambda\varepsilon}(\nabla_\mu g_{\nu\varepsilon}+\nabla_\nu g_{\mu\varepsilon}-\nabla_\varepsilon g_{\mu\nu})\qquad(2)$$

解　如关于 L 的共变导数以 $\overline{\nabla}$ 表示之得

$$\overline{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu}=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-L_{\lambda}{}^{\varepsilon}{}_{\mu}g_{\varepsilon\nu}-L_{\lambda}{}^{\varepsilon}{}_{\nu}g_{\mu\varepsilon}$$

$$=\nabla_\lambda g_{\mu\nu}-T_{\lambda\mu}{}^{\varepsilon}g_{\varepsilon\nu}-T_{\lambda\nu}{}^{\varepsilon}g_{\mu\varepsilon}$$

故从$\overline{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu}=0$ 的条件可得(1)。

当 $T_{\mu\nu}{}^{\lambda}=T_{\nu\mu}{}^{\lambda}$ 时，在(1)里循环改变指标 $\lambda\to\mu\to\nu\to\lambda$ 得

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda}=T_{\mu\nu\lambda}+T_{\mu\lambda\nu}$$

$$-\nabla_\nu g_{\lambda\mu}=-T_{\nu\lambda\mu}-T_{\nu\mu\lambda}$$

这些式子与 (1) 边边相加得

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu}+\nabla_\mu g_{\nu\lambda}-\nabla_\nu g_{\lambda\mu}=2T_{\lambda\mu\nu}$$

两边与 $g^{\nu\kappa}$ 作积和可得(2)。

§13 曲率张量

例题 1 在黎曼空间里，设 $\boldsymbol{A}$ 为满足 $\mathrm{div}X=0$ 的向量场全体作成的集。这时如 $X, Y\in\boldsymbol{A}$，则$[X,Y]\in\boldsymbol{A}$。

解 设 $X=(\xi^\lambda)$，$Y=(\eta^\lambda)$，则根据假设知

$$\nabla_\lambda\xi^\lambda=\nabla_\lambda\eta^\lambda=0$$

设$[X,Y]$的分量为 ζ^λ，根据习题3的第 10 题知

$$\zeta^\lambda=\xi^\alpha\nabla_\alpha\eta^\lambda-\eta^\alpha\nabla_\alpha\xi^\lambda$$

故得

$$\nabla_\lambda\zeta^\lambda=\nabla_\lambda\xi^\alpha\nabla_\alpha\eta^\lambda+\xi^\alpha\nabla_\lambda\nabla_\alpha\eta^\lambda-\nabla_\lambda\eta^\alpha\nabla_\alpha\xi^\lambda-\eta^\alpha\nabla_\lambda\nabla_\alpha\xi^\lambda$$

$$=\xi^\alpha\nabla_\lambda\nabla_\alpha\eta^\lambda-\eta^\alpha\nabla_\lambda\nabla_\alpha\xi^\lambda \qquad (1)$$

然而将利齐恒等式

$$\nabla_\lambda\nabla_\alpha\eta^\kappa=\nabla_\alpha\nabla_\lambda\eta^\kappa+R_{\lambda\alpha\varepsilon}{}^{\kappa}\eta^\varepsilon$$

关于 λ 与 κ 缩短之，则

$$\nabla_\lambda\nabla_\alpha\eta^\lambda=\nabla_\alpha\nabla_\lambda\eta^\lambda+R_{\lambda\alpha\varepsilon}{}^{\lambda}\eta^\varepsilon=R_{\alpha\varepsilon}\eta^\varepsilon$$

同理得 $\nabla_\lambda\nabla_\alpha\xi^\lambda=R_{\alpha\varepsilon}\xi^\varepsilon$。将这些式子代入(1)可得 $\nabla_\lambda\zeta^\lambda=0$。

例题 2 在半径 k 的球面 $S^n(k)$的邻域 U_{n+1}^+ 里下式成立（参照习题二第 32 题）。

$$g_{ab}=\delta_{ab}+\frac{x^a x^b}{(x^{n+1})^2},\quad g^{ab}=\delta^{ab}-\frac{x^a x^b}{k^2}$$

$$\left\{ {a \atop bc} \right\}=\frac{1}{k^2}x^a g_{bc},\quad a,b,c,e=1,\cdots,n,$$

$$R_{abc}{}^e=-\frac{1}{k^2}(g_{ac}\delta_b{}^e-g_{bc}\delta_a{}^e)$$

设测地线以弧长 s 为参数，则得

$$x^a=A^a\sin(s/k)+B^a\cos(s/k)$$

式中 A^a，B^a 为常数（由此式可见，球面上的测地线为大圆）。

注意 在 $S^n(k)$里断面曲率恒为 $1/k^2$，故断面曲率为 $a>0$ 的球面的半径是 $1/\sqrt{a}$。

解 g_{ab} 已在 p. 33 求到。为求出 g^{ac} 令

$$g^{ac}=\delta^{ac}+t^{ac}$$

则

$$\delta_b{}^c=g_{ab}g^{ac}=\sum_a\left(\delta_{ab}+\frac{x^a x^b}{(x^{n+1})^2}\right)\left(\delta^{ac}+t^{ac}\right)$$

$$=\delta_b{}^c+\frac{x^b x^c}{(x^{n+1})^2}+t^{bc}+\frac{x^b\sum t^{ac}x^a}{(x^{n+1})^2}$$

因此得

$$\frac{x^b x^c}{(x^{n+1})^2}+t^{bc}+\frac{\sum t^{ac}x^a}{(x^{n+1})^2}x^b=0 \tag{1}$$

乘以 x^b，关于 b 求和得

$$\left(\sum t^{ac}x^a\right)\left(1+\frac{\sum x^b x^b}{(x^{n+1})^2}\right)+\frac{\sum x^b x^b}{(x^{n+1})^2}x^c=0$$

因为 $\sum x^b x^b=k^2-(x^{n+1})^2$，所以从上式得

$$\sum_a t^{ac}x^a=-\frac{1}{k^2}x^c\sum_b x^b x^b.$$

再代入(1)可得 t^{bc} 如下。

$$t^{bc}=-\frac{x^b x^c}{k^2}$$

$\left\{ {a \atop bc} \right\}$，$R_{abc}{}^{e}$ 根据定义求之即可。

以弧长做参数时测地线是

$$\frac{d^2x^a}{ds^2}+\left\{ {a \atop bc} \right\}\frac{dx^b}{ds}\ \frac{dx^c}{ds}=0$$

注意 $g_{bc}\dfrac{dx^b}{ds}\ \dfrac{dx^c}{ds}=1$ 则得

$$\frac{d^2x^a}{ds^2}+\frac{1}{k^2}x^a=0$$

解之得通解

$$x^a=A^a\sin(s/k)+B^a\cos(s/k) \tag{2}$$

注意 (2)是大圆可验证如下。首先是

$$x^a(0)=B^a,\quad \dot{x}^a(0)=(1/k)A^a$$

因为(2)在球面上，故将(2)代入

$$\sum(x^a)^2+(x^{n+1})^2=k^2$$

则可求出 $x^{n+1}(s)$。于是考虑 $x^\lambda=x^\lambda(s)$，$\lambda=1,\cdots,n+1$，这是将(2)看做 E^{n+1} 的曲线时的方程，它满足

$$\sum_{\lambda=1}^{n+1}x^\lambda(0)\dot{x}^\lambda(0)=0$$

故由

$$B^{n+1}=x^{n+1}(0),\quad A^{n+1}=k\dot{x}^{n+1}(0)$$

定义 B^{n+1}，A^{n+1}，则

$$\sum A^aB^a+A^{n+1}B^{n+1}=0$$

成立。运用此式可证

$$x^{n+1}=A^{n+1}\sin(s/k)+B^{n+1}\cos(s/k)$$

与(2)合在一起得

$$x^\lambda=A^\lambda\sin(s/k)+B^\lambda\cos(s/k)$$

此式说明将 $S^n(k)$上的测地线看做 E^{n+1} 的曲线时，它必在位置向量 A^λ，B^λ 张成的平面之中。故测地线是 $S^n(k)$与此二维平面(含原点)

的交线，因此是大圆。

例题 3 设Γ为微分流形的仿射联络，则由

$$S_{\mu\nu}{}^{\lambda}=(1/2)(\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}-\Gamma_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu})$$

$$K_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=\frac{\partial\Gamma_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial\Gamma_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\nu}}{\partial x^{\mu}}+\Gamma_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\varepsilon}\Gamma_{\mu}{}^{\varepsilon}{}_{\nu}-\Gamma_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\varepsilon}\Gamma_{\lambda}{}^{\varepsilon}{}_{\nu}$$

定义的 $S=(S_{\mu\nu}{}^{\lambda})$，$\hat{K}=(K_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa})$分别称为Γ的挠率张量，曲率张量。

对于任意向量场X，Y，通过论证

$$2S(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y] \tag{1}$$

$$\hat{K}(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]} \tag{2}$$

证明 S，$\hat{K}$是张量。

解 设 $X=(\xi^{\lambda})$，$Y=(\eta^{\lambda})$。因

$$\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda}=\xi^{\alpha}\left(\frac{\partial\eta^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\beta}\eta^{\beta}\right),\quad \eta^{\alpha}\nabla_{\alpha}\xi^{\lambda}=\eta^{\alpha}\left(\frac{\partial\xi^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\beta}\xi^{\beta}\right)$$

故边边相减得

$$\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda}-\eta^{\alpha}\nabla_{\alpha}\xi^{\lambda}=\xi^{\alpha}\frac{\partial\eta^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}-\eta^{\alpha}\frac{\partial\xi^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}+(\Gamma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\beta}-\Gamma_{\beta}{}^{\lambda}{}_{\alpha})\xi^{\alpha}\eta^{\beta}$$

即得(1)。(1)的右边是(1,0)阶张量，故在各点 p，S给定 $T_p\times T_p\to T_p$ 的对应，而且关于 X,Y 是多重线性，因此 S 在 p 是(1,2)阶张量。因为 S 的分量是 C^{∞} 级，所以作成（C^{∞} 级的）张量场。

其次证明(2)。设 $Z=\zeta^{\lambda}\partial/\partial x^{\lambda}$ 为任意向量场，将(2)的右边作用在Z上。经计算可得

$$\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z=K_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}\xi^{\lambda}\eta^{\mu}\zeta^{\nu}\partial/\partial x^{\kappa}$$

与挠率张量的情况一样可见$\hat{K}$的张量性。

注意 1 $\hat{K}(X,Y)=(K_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}\xi^{\lambda}\eta^{\mu})$是(1,1)阶张量。如在$p$给定$X$，$Y$，那末$\hat{K}(X,Y)$可看做线性映射

$$\hat{K}(X,Y):T_p\to T_p,\quad Z\to\hat{K}(X,Y)Z=(K_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}\xi^{\lambda}\eta^{\mu}\zeta^{\nu})$$

注意 2 曲率张量 $\hat{K}$ 是零张量的仿射联络称为**平坦联络**。

§14　断面曲率

例题 1　设 $\{X_i\}$ 为 $T_p(M)$ 的任意标准正交基，则下式成立。

$$\mathrm{Ric}(Y,Z)=\sum_{i=1}^{n}R(X_i,Y,Z,X_i)$$

解　设 $X_i=(\xi_i{}^\lambda)$，$Y=(\eta^\lambda)$，$Z=(\zeta^\lambda)$。因为 X_i 为标准正交基，故由定理 4.3 知

$$g^{\lambda\mu}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i{}^\lambda\xi_i{}^\mu$$

成立。因此得

$$\begin{aligned}\sum_i R(X_i,Y,Z,X_i)&=\sum_i R_{\lambda\mu\nu\omega}\xi_i{}^\lambda\eta^\mu\zeta^\nu\xi_i{}^\omega\\&=R_{\lambda\mu\nu\omega}\left(\sum_i\xi_i{}^\lambda\xi_i{}^\omega\right)\eta^\mu\zeta^\nu\\&=R_{\lambda\mu\nu\omega}g^{\lambda\omega}\eta^\mu\zeta^\nu=R_{\mu\nu}\eta^\mu\zeta^\nu\\&=\mathrm{Ric}(Y,Z)\end{aligned}$$

例题 2　在四维爱因斯坦空间里，设 X_1,X_2,X_3,X_4 为 $T_p(M)$ 的任意标准正交基，则

$$\rho_{12}=\rho_{34},\quad \rho_{13}=\rho_{24},\quad \rho_{14}=\rho_{23}$$

成立。式中 $\rho_{ij}=\rho(X_i,X_j)$是 X_i，X_j 所张平面的断面曲率。

解　设 R_{ijkl} 为曲率张量 $R=(R_{\lambda\mu\nu\omega})$关于 $\{X_i\}$ 的分量。即

$$R(X_i,X_j,X_k,X_l)=R_{ijkl}$$

首先是

$$\rho_{ij}=\rho(X_i,X_j)=-R(X_i,X_j,X_i,X_j)=-R_{ijij}$$

因为对于爱因斯坦空间

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=ag(X,Y),\quad a=\text{常数}$$

成立，所以利齐张量与 g 关于$\{X_i\}$的分量 $\mathrm{Ric}(X_i,X_j)=R_{ij}$，$g(X_i,X_j)=\delta_{ij}$ 之间有关系

$$R_{ij}=a\delta_{ij}$$

然而根据例题 1 知

$$R_{jk}=\mathrm{Ric}(X_j,X_k)=\sum_{i=1}^{n}R(X_i,X_j,X_k,X_i)=\sum_i R_{ijki}$$

故得

$$\sum_i R_{ijki}=a\delta_{jk}$$

于其中令 $j=k=1$ 得

$$R_{2112}+R_{3113}+R_{4114}=a$$

即

$$\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{14}=a$$

同理可得

$$\rho_{21}+\rho_{23}+\rho_{24}=\rho_{31}+\rho_{32}+\rho_{34}=\rho_{41}+\rho_{42}+\rho_{43}=a$$

注意 $\rho_{ij}=\rho_{ji}$ 可见

$$\rho_{12}=\rho_{34},\quad \rho_{13}=\rho_{24},\quad \rho_{14}=\rho_{23}$$

例题 3 对于断面曲率 $\rho(X,Y)$存在常数 Δ，$\delta(\geqslant 0)$使得

$$0\leqslant\Delta\delta\leqslant\rho(X,Y)\leqslant\Delta$$

的黎曼空间称为 δ(pinched) **夹紧空间**。这时如关于标准正交基，曲率张量的分量记做 R_{ijkl}，则下列各关系成立。

$$\Delta\delta\leqslant-R_{ijij}\leqslant\Delta \tag{1}$$

$$|R_{ijik}|\leqslant\frac{\Delta}{2}(1-\delta) \tag{2}$$

$$|R_{ijkl}|\leqslant\frac{2\Delta}{3}(1-\delta) \tag{3}$$

在式中设 i，j，k，l 全不相同。

解 因为在各点证出即可，所以固定一点 p，在这里证明．设 R_{ijkl} 是关于 $T_p(M)$的任意标准正交基 $\{X_i\}$ 的分量，因为

$$\rho_{ij}=\rho(X_i,X_j)=-R_{ijij}$$

所以(1)显然可得。以下假设 j，j，k，l 全不相同。根据假设

$$\Delta\delta \leqslant \rho(X_i, aX_j + bX_k) \leqslant \Delta$$

对于任意实数 a, $b(a^2+b^2\neq 0)$成立。详细写是

$$\Delta\delta \leqslant -\frac{R(X_i, aX_j+bX_k, X_i, aX_j+bX_k)}{a^2+b^2} \leqslant \Delta$$

展开分子并去分母得

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)\Delta\delta \leqslant & -a^2R(X_i,X_j,X_i,X_j) \\ & -2abR(X_i,X_j,X_i,X_k) \\ & -b^2R(X_i,X_k,X_i,X_k) \\ \leqslant & (a^2+b^2)\Delta\end{aligned}$$

由此可得下列二不等式

$$(\rho_{ij}-\Delta\delta)a^2 - 2abR_{ijik} + (\rho_{ik}-\Delta\delta)b^2 \geqslant 0 \tag{4}$$

$$(\Delta-\rho_{ij})a^2 + 2abR_{ijik} + (\Delta-\rho_{ik})b^2 \geqslant 0 \tag{5}$$

因为(4)式中 a^2 的系数非负而且对于任意的 a, b, (4)成立，所以其判别式非正，因此得

$$(R_{ijik})^2 \leqslant (\rho_{ij}-\Delta\delta)(\rho_{ik}-\Delta\delta)$$

$$\therefore\quad |R_{ijik}| \leqslant (\rho_{ij}-\Delta\delta)^{1/2}(\rho_{ik}-\Delta\delta)^{1/2}$$

然而，一般地说$\sqrt{xy} \leqslant (x+y)/2$，故得

$$|R_{ijik}| \leqslant (1/2)(\rho_{ij}+\rho_{ik}-2\Delta\delta) \tag{6}$$

同理从(5)也可得

$$|R_{ijik}| \leqslant (1/2)(2\Delta-\rho_{ij}-\rho_{ik}) \tag{7}$$

(6)，(7)相加，以2除之得

$$|R_{ijik}| \leqslant \frac{\Delta}{2}(1-\delta)$$

即(2)。

以下关于 R_{ijkl} 证明(3)。首先对于 $a^2+b^2\neq 0$, $c^2+d^2\neq 0$ 的任意 a, b, c, d,

$$\Delta\delta \leqslant \rho(aX_i+bX_k, cX_l+dX_j) \leqslant \Delta \tag{8}$$

成立。现在令

$$F(a,i;b,k;c,l;d,j) = \rho(aX_i+bX_k, cX_l+dX_j) - \Delta\delta$$

由 (8) 可见

$$F(a,i;b,k;c,l;d,j)\geqslant 0$$

再令

$$G(a,i;b,k;c,l;d,j)=$$
$$=(1/2)\{F(a,i;b,k;c,l;d,j)+F(a,i;-b,k;c,l;-d,j)\}\geqslant 0$$

则

$$2G(a,i;b,k;c,l;d,j)$$
$$=\rho(aX_i+bX_k,cX_l+dX_j)+\rho(aX_i-bX_k,cX_l-dX_j)-2\varDelta\delta$$

将右边第一项展开之

$$-\rho(aX_i+bX_k,cX_l+dX_j)$$
$$=\frac{R(aX_i+bX_k,cX_l+dX_j,aX_i+bX_k,cX_l+dX_j)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

去分母

$$-(a^2+b^2)(c^2+d^2)\rho(aX_i+bX_k,cX_j+dX_l)$$
$$=a^2c^2R_{ilil}+acbdR_{ilkj}+a^2d^2R_{ijij}+adbcR_{ijkl}$$
$$+bcadR_{klij}+b^2c^2R_{klkl}+bdacR_{kjil}+b^2d^2R_{kjkj}+*$$

式中的 * 是 $b^rd^s(r+s=$奇数$)$ 的项之和。由此得

$$G(a,i;b,k;c,l;d,j)$$
$$=\{a^2c^2\rho_{il}+a^2d^2\rho_{ij}+b^2c^2\rho_{kl}+b^2d^2\rho_{kj}$$
$$+2abcd(R_{ijkl}+R_{ilkj})\}/(a^2+b^2)(c^2+d^2)-\varDelta\delta \qquad (9)$$

再定义 H 如下。

$$H(a,i;b,k;c,l;d,j)$$
$$=G(a,i;b,k;c,l;d,j)+G(-a,i;b,l;c,j;d,k)\geqslant 0 \qquad (10)$$

根据(9)，H 有

$$H=\frac{P}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}-2\varDelta\delta\geqslant 0 \qquad (11)$$

的形状，使用(9)来计算 P 得

$$P=a^2c^2\rho_{il}+a^2d^2\rho_{ij}+b^2c^2\rho_{kl}+b^2d^2\rho_{kj}+2abcd(R_{ijkl}$$
$$+R_{ilkj})+a^2c^2\rho_{ij}+a^2d^2\rho_{ik}+b^2c^2\rho_{lj}+b^2d^2\rho_{lk}$$

$$
\begin{aligned}
-2abcd(R_{iklj}+R_{ijlk}) &= a^2c^2(\rho_{ij}+\rho_{il}) \\
&+ a^2d^2(\rho_{ij}+\rho_{ik}) + b^2c^2(\rho_{lk}+\rho_{lj}) + b^2d^2(\rho_{kl}+\rho_{kj}) \\
&+ 6abcdR_{ijkl}
\end{aligned}
$$

为整理(11)，去分母，令

$$
\begin{aligned}
&A=\rho_{ij}+\rho_{il}-2\Delta\delta,\quad B=\rho_{ij}+\rho_{ik}-2\Delta\delta \\
&C=\rho_{lk}+\rho_{lj}-2\Delta\delta,\quad D=\rho_{kl}+\rho_{kj}-2\Delta\delta \\
&E=3R_{ijkl}
\end{aligned}
$$

则由(11)可得

$$Aa^2c^2+Ba^2d^2+Cb^2c^2+Db^2d^2+2Eabcd\geqslant 0$$

即

$$(Ac^2+Bd^2)a^2+2Eabcd+(Cc^2+Dd^2)b^2\geqslant 0$$

此式可看做关于 a，b 的二次式。因为 $A\geqslant 0$，$B\geqslant 0$ 而且对于任意 a，b，上式是非负的，故其判别式

$$(Ecd)^2-(Ac^2+Bd^2)(Cc^2+Dd^2)\leqslant 0$$

整理之得

$$ACc^4+(AD+BC-E^2)c^2d^2+BDd^4\geqslant 0 \qquad (12)$$

对于任意 c，d 成立。

一般地说对于二次函数可以证明以下事实。

如 $f(x)=ax^2+bx+c$，$a\geqslant 0$，$c\geqslant 0$ 对于任意 $x\geqslant 0$ 恒满足 $f(x)\geqslant 0$ 时，则

$$b\geqslant -2\sqrt{ac} \qquad (13)$$

成立。

运用(13)，从(12)得

$$AD+BC-E^2\geqslant -2\sqrt{ABCD}$$

$$\therefore\quad \sqrt{AD}+\sqrt{BC}\geqslant |E|$$

然因$\sqrt{AD}\leqslant(1/2)(A+D)$，$\sqrt{BC}\leqslant(1/2)(B+C)$，故得

$$|R_{ijkl}|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(A+B+C+D)$$

$$= \frac{1}{6}(2\rho_{ij} + 2\rho_{kl} + \rho_{il} + \rho_{ik} + \rho_{lj} + \rho_{kj} - 8\varDelta\delta) \qquad (14)$$

同理，从

$$\rho(aX_i + bX_k, cX_l + dX_j) \leqslant \varDelta$$

出发，令

$$A' = 2\varDelta - \rho_{ij} - \rho_{il}, \quad B' = 2\varDelta - \rho_{ij} - \rho_{ik}$$
$$C' = 2\varDelta - \rho_{lk} - \rho_{lj}, \quad D' = 2\varDelta - \rho_{kl} - \rho_{kj}$$

可得

$$|R_{ijkl}| \leqslant \frac{1}{6}(A' + B' + C' + D')$$

即

$$|R_{ijkl}| \leqslant \frac{1}{6}(8\varDelta - 2\rho_{ij} - 2\rho_{kl} - \rho_{il} - \rho_{ik} - \rho_{lj} - \rho_{kj}) \qquad (15)$$

取(14)与(15)的相加平均得

$$|R_{ijkl}| \leqslant \frac{2\varDelta}{3}(1-\delta)$$

习 题 三

1. 关于仿射联络系数的变换式，如$\{U, x^\lambda\} \cap \{\overline{U}, \overline{x}^\lambda\} \cap \{U', x'^\lambda\} \neq \varnothing$，连续进行坐标变换 $x \to \overline{x} \to x'$ 而得的 $\Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu$，$\Gamma'_\mu{}^\lambda{}_\nu$ 的关系式与经直接 $x \to x'$ 而得的关系式一致。

2. 在 M^n 的决定邻域系的各邻域里，$\Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu = 0$ 的 Γ 为 M^n 的仿射联络系数的充要条件是这些坐标系间的坐标变换是线性变换。

3. 如张量 $T = (T_{\lambda\mu})$ 对称，则关于任意仿射联络 $\nabla_\xi T$ 也是这样。

4. 通过坐标变换验证张量 T 的共变导数，例如，对于 (1,1) 阶张量，$\nabla_\nu T_\lambda{}^\mu$ 也是张量的分量。

5. 设 Γ 为 M^n 的仿射联络，则 $\overline{\Gamma}$ 是仿射联络的充要条件是存在 (1,2) 阶张量场 T 使得 $\overline{\Gamma} = \Gamma + T$.

6. 设Γ为仿射联络，令

$$\overline{\Gamma}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}=\Gamma_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu}$$

则$\overline{\Gamma}$也是M^n的仿射联络。这时若以∇，$\overline{\nabla}$分别表示关于Γ，$\overline{\Gamma}$的共变微分，则对于任意向量ξ^κ下式成立。

$$\overline{\nabla}_\lambda\xi^\kappa=\nabla_\lambda\xi^\kappa+2\xi^\alpha S_{\alpha\lambda}{}^\kappa$$

式中 $S_{\lambda\mu}{}^\kappa$ 是由

$$S_{\lambda\mu}{}^\kappa=(1/2)(\Gamma_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\mu}-\Gamma_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda})$$

定义的Γ的挠率张量（参照§13 例题3）。

7. 使用关于任意仿射联络Γ的共变导数表示李导数的公式（黎曼几何 p.103,104），例如(1,1)阶张量，可得下式。

$$\mathcal{L}_\xi T_\lambda{}^\kappa=\xi^\alpha\frac{\partial T_\lambda{}^\kappa}{\partial x^\alpha}-T_\lambda{}^\alpha\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\alpha}+T_\alpha{}^\kappa\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}$$

$$=\xi^\alpha\nabla_\alpha T_\lambda{}^\kappa-T_\lambda{}^\alpha\overline{\nabla}_\alpha\xi^\kappa+T_\alpha{}^\kappa\overline{\nabla}_\lambda\xi^\alpha$$

8. 在微分流形 M^n 上给定 n 个向量场 $X_{(1)},\cdots,X_{(n)}$，设在各点总是线性无关。又设 $X_{(i)}$ 的分量 $\xi_{(i)}{}^\lambda$ 所作矩阵的逆矩阵为$(\xi_\lambda{}^{(i)})$，即

$$\xi_{(i)}{}^\lambda\xi_\mu{}^{(i)}=\delta_\mu^\lambda,\quad \xi_{(i)}{}^\lambda\xi_\lambda{}^{(j)}=\delta_i^j$$

这时，由

$$\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}=\xi_{(i)}{}^\lambda\frac{\partial\xi_\nu{}^{(i)}}{\partial x^\mu}$$

定义的Γ是 M^n 的仿射联络。

9. 在 M^n 上给定 n 个向量场 $X_{(i)}$，设在各点线性无关。这时，存在仿射联络使得各 $X_{(i)}$ 同时为平行向量场。

10. 关于对称仿射联络，下式成立。

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial u_\lambda}{\partial x^\mu}=\nabla_\lambda u_\mu-\nabla_\mu u_\lambda$$

$$[X,Y]=(\xi^\alpha\nabla_\alpha\eta^\lambda-\eta^\alpha\nabla_\alpha\xi^\lambda)\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

11. 关于对称仿射联络，$\{h,k\}$，$\{h, h\}$的分量 $N(h,k)_{\lambda\mu}{}^{\kappa}$，$N(h)_{\lambda\mu}{}^{\kappa}$ 可写如下列形状（参照习题二第 26 题）。

$$2N(h,k)_{\lambda\mu}{}^{\kappa} = h_{\lambda}{}^{\varepsilon}\nabla_{\varepsilon}k_{\mu}{}^{\kappa} - k_{\mu}{}^{\varepsilon}\nabla_{\varepsilon}h_{\lambda}{}^{\kappa} + k_{\lambda}{}^{\varepsilon}\nabla_{\varepsilon}h_{\mu}{}^{\kappa} - h_{\mu}{}^{\varepsilon}\nabla_{\varepsilon}k_{\lambda}{}^{\kappa}$$
$$- h_{\varepsilon}{}^{\kappa}(\nabla_{\lambda}k_{\mu}{}^{\varepsilon} - \nabla_{\mu}k_{\lambda}{}^{\varepsilon}) - k_{\varepsilon}{}^{\kappa}(\nabla_{\lambda}h_{\mu}{}^{\varepsilon} - \nabla_{\mu}h_{\lambda}{}^{\varepsilon})$$
$$N(h)_{\lambda\mu}{}^{\kappa} = h_{\lambda}{}^{\varepsilon}\nabla_{\varepsilon}h_{\mu}{}^{\kappa} - h_{\mu}{}^{\varepsilon}\nabla_{\varepsilon}h_{\lambda}{}^{\kappa} - h_{\varepsilon}{}^{\kappa}(\nabla_{\lambda}h_{\mu}{}^{\varepsilon} - \nabla_{\mu}h_{\lambda}{}^{\varepsilon})$$

12. 在仿射联络空间 M^n 里，设 c 为连结 p，q 两点的曲线，则

（i） c 上的平行向量场如在 c 上一点为 0 则恒等于0。

（ii） 设 $Y\in T_q(M)$ 为 $X\in T_p(M)$ 沿 c 平行移动而得的向量，则平行移动Y到 p 而得的向量是X。

（iii） 如平行移动 X_1，$X_2\in T_p(M)$而得 Y_1，$Y_2\in T_q(M)$，则平行移动 $a_1X_1+a_2X_2$ 可得 $a_1Y_1+a_2Y_2$。其中$a_1,a_2\in \boldsymbol{R}$。

（iv） 将在平行移动下而得的对应 $X\in T_p(M)\to Y\in T_q(M)$再写做 c：$T_p(M)\to T_q(M)$，则 c 为同构映射。

13. 设 p 为$\{M^n, \Gamma\}$的一点。沿通过 p 的闭曲线 c 转一周的平行移动产生同构映射 c：$T_p(M)\to T_p(M)$（前题）。考虑通过 p的闭曲线全体，设对应的同构映射的集为 H_p。对于 c_1，$c_2\in H_p$，设在曲线 c_1 之后连结曲线 c_2 而得闭曲线对应的同构映射为 $c_2\circ c_1$，则

（i） 关于这种运算 H_p 成群。

（ii） 对于 M^n 的任意二点 p，q，$H_p\cong H_q$（同构）。

注意 称 H_p 为$\{M^n, \Gamma\}$的**齐性和乐群**。

14. 关于二仿射联络空间 $\{M^r, \Gamma\}$，$\{\overline{M}^s, \overline{\Gamma}\}$，于其直积微分流形 $M^n=M^r\times\overline{M}^s$ 的决定邻域系$\{x^{\lambda}\}=\{x^i, x^a\}$（参照习题二第1题）定义 $L_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$ 为

$$L_j{}^i{}_k=\Gamma_j{}^i{}_k,\quad L_b{}^a{}_c=\overline{\Gamma}_b{}^a{}_c,\quad \text{其他 } L_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}=0$$

则$\{M^n, L\}$为仿射联络空间。

15. 设 $H=(h^{\lambda\mu})$为 M^n 的正则张量场，$K=(k_{\lambda\mu})=H^{-1}$，又设 ∇ 为仿射联络。关于各点 $p\in M^n$，可以考虑同构映射 H，K

$$H:\ T_p{}^*(M)\to T_p(M),\quad u\to H(u)=(h^{\lambda a}u_a)$$

$$K: T_p(M) \to T_p^*(M), \quad \xi \to K(\xi) = (k_{\lambda\alpha}\xi^\alpha)$$

这时由

(i) $$\overline{\nabla}_X u = K(\nabla_X H(u))$$

定义的 $\overline{\nabla}$ 是仿射联络，其系数由

$$\overline{\Gamma}_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\mu} = \Gamma_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\mu} - (\nabla_\lambda h^{\alpha\kappa})k_{\mu\alpha}$$

而定。

(ii) $$\overline{\nabla}_\nu h^{\lambda\mu} = -(\nabla_\nu h^{\alpha\lambda})k_{\varepsilon\alpha}h^{\varepsilon\mu}$$

(iii) 假设 H 对称，则

$$\overline{\nabla}_\nu h^{\lambda\mu} = -\nabla_\nu h^{\lambda\mu}$$

(iv) 当 H 对称时，令

$$\overset{*}{\Gamma}_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\mu} = (1/2)(\Gamma_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\mu} + \overline{\Gamma}_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\mu}) = \Gamma_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\mu} - (1/2)k_{\mu\alpha}\nabla_\lambda h^{\alpha\kappa}$$

则 $\overset{*}{\Gamma}$ 也是仿射联络，而且 $\overset{*}{\nabla}_\nu h^{\lambda\mu} = 0$

16. 关于 $\{M^n, \Gamma\}$，

(i) M^n 的向量场 $X = (\xi^\lambda(x))$ 沿 c: $x^\lambda = x^\lambda(t)$ 平行的条件是 TM 的曲线

$$x^\lambda = x^\lambda(t), \quad y^\lambda = \xi^\lambda(x(t))$$

为水平曲线。

(ii) M^n 的曲线 $x^\lambda = x^\lambda(t)$ 为道路的条件是 TM 的曲线

$$x^\lambda = x^\lambda(t), \quad y^\lambda = \dot{x}^\lambda(t)$$

是水平曲线。

(iii) 在 TM 的各点，$[B_{(\lambda)}, B_{(\mu)}] = 0$ 成立的条件是 Γ 平坦。

17. 在黎曼空间里，仿射联络为度量仿射联络的条件是下列命题之一成立。

(i) 在沿曲线的平行移动下向量之长不变。

(ii) 在沿曲线的平行移动下向量的内积不变。

18. 关于三维欧氏空间 E^3 的直角坐标系 x^1, x^2, x^3 定义 $\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$ 为

$$\Gamma_{1}{}^{3}{}_{2} = \Gamma_{2}{}^{1}{}_{3} = \Gamma_{3}{}^{2}{}_{1} = 1, \quad \Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} = -\Gamma_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu},$$

在 λ, μ, ν 中如有相等的，则 $\Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu = 0$。

这时

（i） 道路是直线。

（ii） Γ 是度量联络。

（iii） 设 S 为 Γ 的挠率张量，则

$$S(X, Y) = X \times Y$$

式中设 $X\times Y$ 为 X 与 Y 的外积。

19. 对于黎曼空间的向量场，下式成立。

（i） $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

（ii） $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$

（iii） $\langle \nabla_X Y, Z\rangle = (1/2)\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle\}$

20. 在坐标变换下

$$\left\{ {\lambda \atop \lambda\nu} \right\}' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\left\{ {\varepsilon \atop \varepsilon\alpha} \right\} + \frac{\partial \log|\Delta|}{\partial x'^\nu}$$

成立。式中设 $\Delta = \det(\partial x/\partial x')$。

21. 在球面 $S^n(k):(x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = k^2$ 的坐标邻域 U^+_{n+1}: $x^{n+1}>0$ 里，令 $g = \det(g_{ab})$，则

$$\sqrt{g} = \frac{k}{x^{n+1}}$$

22. 在黎曼空间的点 p 的齐性和乐群是正交变换群 $O(T_p(M))$ 的子群。

注意。设 G 为正交变换群 $O(V)$ 的子群。子向量空间 $U(\subset V)$ 对于所有的 $g\in G$ 满足 $g(U)\subset U$ 时，称为**不变子空间。**当不变子空间只含$\{0\}$与V时，G 或 V 称为**既约，**否则称为**可约。**当 H_p 既约（可约）时，则称黎曼空间既约（可约）。

23. 在既约黎曼空间里，如对称张量场 $t_{\lambda\mu}$ 是平行张量场，则 $t_{\lambda\mu} = a g_{\lambda\mu}$, $a\in \boldsymbol{R}$ 成立。

24. 设 $h^{\lambda\mu}$ 为反称张量，则对于任意的 u_λ，ξ^λ，下式成立。

$$h^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta u_\lambda = -\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta\lambda}{}^{\varepsilon}u_\varepsilon,\quad h^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\xi^\kappa = \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta\varepsilon}{}^{\kappa}\xi^\varepsilon$$

25. 在二维黎曼空间里，如已知 R_{1212}，则曲率张量 $R_{\lambda\mu\nu\omega}$ 的全部分量就知道了。

26. 在黎曼空间里如果已知曲率张量的适当 $n^2(n^2-1)/12$ 个分量，则其他分量可从

$$R_{\lambda\mu\nu\omega} = -R_{\mu\lambda\nu\omega} = -R_{\lambda\mu\omega\nu}$$

$$R_{\lambda\mu\nu\omega} + R_{\mu\nu\lambda\omega} + R_{\nu\lambda\mu\omega} = 0$$

得到。

27. 设 s，t 为实数，R 为曲率张量，令

$$B(X,\ Y) = R(X,\ Y,\ X,\ Y)$$

则

$$6R(X,Y,Z,W) = \left[\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\{B(X+sZ,Y+tW) - B(X+sW,Y+tZ)\}\right]_{s=t=0}$$

28. 如利齐形式为正定的，则数量曲率为正。

29. 如 $\nabla_\lambda R_{\mu\nu} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu} = 0$，则数量曲率为常数。

30. 当 E^3 的曲面 S 关于直角坐标系由 $z = z(x,\ y)$ 给定时，令 $\partial z/\partial x = z_x$，$\partial^2 z/\partial x\partial y = z_{xy}$，则对于 S 的坐标系 $x^1 = x$，$x^2 = y$，下式成立。

$$g_{11} = 1 + z_x^2,\quad g_{12} = g_{21} = z_x z_y,\quad g_{22} = 1 + z_y^2$$

$$g^{11} = (1 + y_y^2)/g,\quad g^{12} = g^{21} = -z_x z_y/g,\quad g^{22} = (1 + z_x^2)/g$$

$$g = 1 + z_x^2 + z_y^2$$

$$[ab,c] = \frac{\partial z}{\partial x^c}\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^a\partial x^b},\quad \left\{ {c \atop ab} \right\} = \frac{1}{g}\ \frac{\partial z}{\partial x^c}\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^a\partial x^b}$$

$$R_{1212} = (z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy})/g$$

31. 在 E^3 里关于直角坐标系 x，y，z，由

$$x=(a+b\cos v)\cos u,\quad y=(a+b\cos v)\sin u$$
$$z=b\sin v,\quad a>b>0$$

给定的环面（参照§10 例题2）中，令 $u=u^1$，$v=u^2$ 为其坐标系，则下式成立。

$$g_{11}=(a+b\cos v)^2,\quad g_{12}=0,\quad g_{22}=b^2,$$
$$g^{11}=1/g_{11},\qquad g^{12}=0,\quad g^{22}=1/b^2$$

非0克氏记号有

$$[11,\ 2]=-[12,\ 1]=b(a+b\cos v)\sin v$$

$$\left\{{1 \atop 12}\right\}=-\frac{b\sin v}{a+b\cos v},\quad \left\{{2 \atop 11}\right\}=\frac{1}{b}(a+b\cos v)\sin v$$

$$R_{1212}=-b(a+b\cos v)\cos v$$

32. 关于直积黎曼空间（参照§10 例题1）

$$ds^2=g_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu=g_{ij}(x^k)dx^idx^j+g_{ab}(x^c)dx^adx^b$$

有

（i） 除 $\left\{{i \atop jk}\right\}$，$\left\{{a \atop bc}\right\}$以外，$\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}$全是0．

（ii） 除 $R_{ijk}{}^l$，$R_{abc}{}^e$ 以外，$R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa$ 全是0．

（iii） 除 R_{ij}，R_{ab} 以外，$R_{\lambda\mu}$ 全是0．

（iv） 对于数量曲率

$$R=R_1+R_2$$

式中 R_1，R_2 分别是由 g_{ij}，g_{ab} 作成的数量曲率。

33. 设仿射联络 Γ 的曲率张量，挠率张量为 $\hat{K}=(K_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa)$，$S=(S_{\lambda\mu}{}^\kappa)$，则下列利齐公式成立。

$$\nabla_\lambda\nabla_\mu f-\nabla_\mu\nabla_\lambda f=-2S_{\lambda\mu}{}^\alpha\nabla_\alpha f$$

$$\nabla_\lambda\nabla_\mu T_{\alpha_1\cdots\alpha_q}{}^{\beta_1\cdots\beta_p}-\nabla_\mu\nabla_\lambda T_{\alpha_1\cdots\alpha_q}{}^{\beta_1\cdots\beta_p}$$
$$=\sum_{i=1}^{p}K_{\lambda\mu\varepsilon}{}^{\beta_i}T_{\alpha_1\cdots\alpha_q}{}^{\beta_1\cdots\varepsilon\cdots\beta_p}-\sum_{i=1}^{q}K_{\lambda\mu\alpha_i}{}^{\varepsilon}T_{\alpha_1\cdots\varepsilon\cdots\alpha_q}{}^{\beta_1\cdots\beta_p}$$
$$-2S_{\lambda\mu}{}^\varepsilon\nabla_\varepsilon T_{\alpha_1\cdots\alpha_q}{}^{\beta_1\cdots\beta_p}$$

34. 如果存在 n 个向量场在一点线性无关而且关于 Γ 平行，

那末 Γ 是平坦的。

35. 如果关于 Γ 的平行性与曲线的取法无关，则 Γ 平坦。

36. $\overline{\Gamma}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}=\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}+t_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ 的曲率张量之间下列关系式成立。

$$\overline{K}_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=K_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}+\nabla_{\lambda}t_{\mu\nu}{}^{\kappa}-\nabla_{\mu}t_{\lambda\nu}{}^{\kappa}+t_{\lambda\varepsilon}{}^{\kappa}t_{\mu\nu}{}^{\varepsilon}-t_{\mu\varepsilon}{}^{\kappa}t_{\lambda\nu}{}^{\varepsilon}+2S_{\lambda\mu}{}^{\varepsilon}t_{\varepsilon\nu}{}^{\kappa}$$

式中设 ∇ 是关于 Γ 的共变导数，S 为 Γ 的挠率张量。

37. 在黎曼空间 $\{M^{n},\ g\}$ 里，设 $H=\{h_{\lambda}{}^{\kappa}\}$ 是正则张量场。令

$$g'_{\lambda\mu}=g_{\alpha\beta}h_{\lambda}{}^{\alpha}h_{\mu}{}^{\beta}$$

则 g' 也是一种黎曼度量。又如 H 满足

$$\nabla_{\lambda}h_{\mu}{}^{\kappa}=\nabla_{\mu}h_{\lambda}{}^{\kappa}$$

则下式成立。

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}'=\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}+k_{\varepsilon}{}^{\lambda}\nabla_{\mu}h_{\nu}{}^{\varepsilon}$$

$$R'_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=R_{\lambda\mu\varepsilon}{}^{\alpha}h_{\nu}{}^{\varepsilon}k_{\alpha}{}^{\kappa},\quad R'_{\lambda\mu\nu\omega}=R_{\lambda\mu\rho\sigma}h_{\nu}{}^{\rho}h_{\omega}{}^{\sigma}$$

式中设 $K=H^{-1}=(k_{\lambda}{}^{\mu})$

38. 设 ξ^{λ} 为平行向量场，则 $R_{\lambda\mu\alpha}{}^{\kappa}\xi^{\alpha}=0$。由此可得在数量曲率 $R\neq0$ 的爱因斯坦空间里除零向量场外不存在平行向量场。

39. $n(>2)$ 维黎曼空间为爱因斯坦空间的充要条件是 $nR_{\lambda\mu}R^{\lambda\mu}=R^{2}$。

40. 在常曲率空间

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=-k(g_{\lambda\nu}\delta_{\mu}{}^{\kappa}-g_{\mu\nu}\delta_{\lambda}{}^{\kappa}),\quad k=R/n(n-1)$$

里局部地存在满足

$$\nabla_{\mu}v_{\nu}=kg_{\mu\nu}+v_{\mu}v_{\nu}$$

的向量场 v。

41. 在 R^{n} 的半平面 $R_{+}{}^{n}:x^{n}>0$，如由

$$g_{\lambda\mu}=\delta_{\lambda\mu}/(x^{n})^{2}$$

定义 g，则 $\{R_{+}{}^{n},\ g\}$ 是数量曲率为负的常曲率空间而且下式成立。

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=g_{\lambda\nu}\delta_{\mu}{}^{\kappa}-g_{\mu\nu}\delta_{\lambda}{}^{\kappa},\quad R=-n(n-1)$$

42. 如在黎曼空间 $M^{n}(n>2)$ 的各点，平均曲率 $\rho(X)$ 与 X 无关，则 M^{n} 是爱因斯坦空间。

43. (i) 在二维黎曼空间里，利齐张量恒为 $R_{\lambda\mu}=k(x)g_{\lambda\mu}$ 的形状。

(ii) 二维、三维爱因斯坦空间是常曲率空间。

44. 在二维黎曼空间里

$$K=-\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2}$$

是数量函数。

45. 非平坦常曲率空间不是两个黎曼空间的直积黎曼空间。

46. 数量曲率分别为 R_1，R_2 的爱因斯坦空间 M^r，M^s 的直积黎曼空间为爱因斯坦空间的充要条件是

$$\frac{R_1}{r}=\frac{R_2}{s}$$

47. 利齐张量为平行张量场的黎曼空间称为**利齐平行空间**。两个爱因斯坦空间的直积黎曼空间是利齐平行空间。

48. 如对于任意反称张量 $t^{\lambda\mu}$ 存在 a，$b\in \boldsymbol{R}$ 使得

$$a\leqslant -\frac{R_{\lambda\mu\nu\omega}t^{\lambda\mu}t^{\nu\omega}}{t_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta}}\leqslant b$$

恒成立时，则断面曲率 $\rho(X, Y)$恒满足下式：

$$\frac{a}{2}\leqslant\rho(X, Y)\leqslant\frac{b}{2}$$

49. 设 X_i，X_j，X_k 为 $T_p(M)$ 的标准正交基的一部分。如果 $\rho(X_i, X_j)$是

$$f(\theta)=\rho(X_i, X_j\cos\theta+X_k\sin\theta)$$

的临界值($f'=0$)，则

$$R_{ijik}=R(X_i, X_j, X_i, X_k)=0$$

50. 在四维黎曼空间里，存在 $T_p(M)$ 的标准正交基$\{X_i\}$，关于此基底，曲率张量的分量

$$R_{1213},\quad R_{1214},\quad R_{1223},\quad R_{1224},\quad R_{1314},\quad R_{1323}$$

为 0。

51. 在四维爱因斯坦空间的任意点，存在满足下列条件的标准正交基。

（i） 除了 $\rho(X_i, X_j)$，R_{1234}，R_{1342}，R_{1423} 外，曲率张量的分量全是0。

（ii）
$$|R_{1342}-R_{1234}|\leqslant\rho_{12}-\rho_{13},\quad |R_{1342}-R_{1423}|\leqslant\rho_{13}-\rho_{14},$$
$$|R_{1423}-R_{1234}|\leqslant\rho_{12}-\rho_{14}$$

52. 在 $\delta<1$ 的 δ 夹紧黎曼空间里，设 $X, Y, Z\in T_p(M)$ 是单位向量并满足下列条件。

$$Y\neq Z,\ \langle X, Y\rangle=\langle X, Z\rangle>0$$
$$\rho(X, Y)=\rho(X, Z)=\Delta\delta$$

这时，$\rho(Y, Z)<\Delta$ 成立。

第四章　变 换 论

§15. 仿 射 变 换

例题 1. 对于黎曼空间的任意向量场X，Y，下式成立.

$$\mathscr{L}_{[X,Y]}\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}=\mathscr{L}_X\mathscr{L}_Y\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}-\mathscr{L}_Y\mathscr{L}_X\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}.$$

解. 计算右边第一项. 因为

$$\mathscr{L}_X T_{\mu\nu}{}^{\lambda}=\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}T_{\mu\nu}{}^{\lambda}+T_{\alpha\nu}{}^{\lambda}\nabla_{\mu}\xi^{\alpha}+T_{\mu\alpha}{}^{\lambda}\nabla_{\nu}\xi^{\alpha}-T_{\mu\nu}{}^{\alpha}\nabla_{\alpha}\xi^{\lambda}\qquad(1)$$

将

$$T_{\mu\nu}{}^{\lambda}=\mathscr{L}_Y\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}=\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\eta^{\lambda}+R_{\beta\mu\nu}{}^{\lambda}\eta^{\beta}$$

代入之，则（1）的右边第一项变为

$$\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}T_{\mu\nu}{}^{\lambda}=\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\eta^{\lambda}+\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}R_{\beta\mu\nu}{}^{\lambda}\eta^{\beta}+R_{\beta\mu\nu}{}^{\lambda}\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}\eta^{\beta}.\qquad(2)$$

然而由于利齐公式可将（2）的右边第一项变为下式.

$$\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\eta^{\lambda}=\xi^{\alpha}(\nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}\nabla_{\nu}\eta^{\lambda}-R_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta}\nabla_{\beta}\eta^{\lambda}+R_{\alpha\mu\beta}{}^{\lambda}\nabla_{\nu}\eta^{\beta}).\qquad(3)$$

再在（3）的右边第一项使用利齐公式，令

$$A=\xi^{\alpha}\nabla_{\mu}R_{\alpha\nu\beta}{}^{\lambda}\eta^{\beta},\qquad B=\xi^{\alpha}R_{\alpha\nu\beta}{}^{\lambda}\nabla_{\mu}\eta^{\beta}$$

则

$$\begin{aligned}\xi^{\alpha}\nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}\nabla_{\nu}\eta^{\lambda}&=\xi^{\alpha}\nabla_{\mu}(\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda}+R_{\alpha\nu\beta}{}^{\lambda}\eta^{\beta})\\&=\xi^{\alpha}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda}+A+B\\&=\nabla_{\mu}(\xi^{\alpha}\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda})-\nabla_{\mu}\xi^{\alpha}\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda}+A+B\\&=\nabla_{\mu}\{\nabla_{\nu}(\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda})-\nabla_{\nu}\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda}\}-\nabla_{\mu}\xi^{\alpha}\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda}+A+B\\&=\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}(\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda})-\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda}-\nabla_{\nu}\xi^{\alpha}\nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda}\\&\quad-\nabla_{\mu}\xi^{\alpha}\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}\eta^{\lambda}+A+B.\end{aligned}\qquad(4)$$

将（4），（3），（2）代入（1）得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X\mathscr{L}_Y\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\} = & \nabla_\mu\nabla_\nu(\xi^\alpha\nabla_\alpha\eta^\lambda) - \nabla_\mu\nabla_\nu\xi^\alpha\nabla_\alpha\eta^\lambda - \nabla_\nu\xi^\alpha\nabla_\mu\nabla_\alpha\eta^\lambda \\ & - \nabla_\mu\xi^\alpha\nabla_\nu\nabla_\alpha\eta^\lambda + \xi^\alpha\nabla_\mu R_{\alpha\nu\beta}{}^\lambda\eta^\beta + \xi^\alpha R_{\alpha\nu\beta}{}^\lambda\nabla_\mu\eta^\beta \\ & - \xi^\alpha R_{\alpha\mu\nu}{}^\beta\nabla_\beta\eta^\lambda + \xi^\alpha R_{\alpha\mu\beta}{}^\lambda\nabla_\nu\eta^\beta + \xi^\alpha\nabla_\alpha R_{\beta\mu\nu}{}^\lambda\eta^\beta \\ & + \xi^\alpha R_{\beta\mu\nu}{}^\lambda\nabla_\alpha\eta^\beta + (\nabla_\alpha\nabla_\nu\eta^\lambda + R_{\beta\alpha\nu}{}^\lambda\eta^\beta)\nabla_\mu\xi^\alpha \\ & + (\nabla_\mu\nabla_\alpha\eta^\lambda + R_{\beta\mu\alpha}{}^\lambda\eta^\beta)\nabla_\nu\xi^\alpha \\ & - (\nabla_\mu\nabla_\nu\eta^\alpha + R_{\beta\mu\nu}{}^\alpha\eta^\beta)\nabla_\alpha\xi^\lambda \qquad (5)\end{aligned}$$

对调 X 与 Y 并从（5）减之得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X\mathscr{L}_Y\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\} - \mathscr{L}_Y\mathscr{L}_X\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\} & = \nabla_\mu\nabla_\nu(\xi^\alpha\nabla_\alpha\eta^\lambda - \eta^\alpha\nabla_\alpha\xi^\lambda) \\ & \quad + R_{\beta\mu\nu}{}^\lambda(\xi^\alpha\nabla_\alpha\eta^\beta - \eta^\alpha\nabla_\alpha\xi^\beta) \\ & = \mathscr{L}_{[X,Y]}\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}\end{aligned}$$

推导过程中使用了

$$\begin{aligned}&\nabla_\alpha R_{\beta\mu\nu}{}^\lambda + \nabla_\beta R_{\mu\alpha\nu}{}^\lambda + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu}{}^\lambda = 0, \\ &\nabla_\alpha\nabla_\nu\eta^\lambda - \nabla_\nu\nabla_\alpha\eta^\lambda = R_{\alpha\nu\beta}{}^\lambda\eta^\beta\end{aligned}$$

等。

注意. 对于任意的张量 T，$\mathscr{L}_{[X,Y]}T = \mathscr{L}_X\mathscr{L}_YT - \mathscr{L}_Y\mathscr{L}_XT$ 也成立（参照习题二第 25 题）。

例题 2. 设 M^n，$\overline{M}^n$ 为仿射联络空间，$\phi: M^n \to \overline{M}^n$ 为微分同胚映射。在沿曲线 c 的平行移动下在切平面间产生的同构映射仍然用 c 表达之，则 ϕ 为仿射映射的充要条件是对于任意的 Y，c，

$$\phi_*(c(Y)) = \phi(c)(\phi_*(Y)) \qquad (1)$$

成立。

解. 设（1）成立。根据 §11 例题 3，在 $p = c(0)$

$$\nabla_X(Y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(c_t^{-1}(Y) - Y).$$

式中设 $X = \dot{c}(0)$，c_t^{-1} 表示从 $c(t)$ 平行移动到 $c(0)$。

因为 ϕ_* 是从 $T_p(M)$ 到 $T_{\phi(p)}(M)$ 的连续线性映射，所以

$$\phi_*(\nabla_X Y) = \lim \phi_*\left(\frac{1}{t}(c_t^{-1}(Y) - Y)\right)$$

$$= \lim \frac{1}{t}(\phi_*(c_t^{-1}(Y)) - \phi_*(Y)).$$

记 $\phi(c)=\gamma$，则 $\dot\gamma(0)=\phi_*(X)$。此外由（1）知 $\phi_*(c_t^{-1}(Y))=\gamma_t^{-1}(\phi_*(Y))$ 成立，故

$$\phi_*(\nabla_X Y) = \lim \frac{1}{t}(\gamma_t^{-1}(\phi_*(Y)) - \phi_*(Y)) = \bar{\nabla}_{\phi_*(X)}\phi_*(Y).$$

故由定理 15·4 知 ϕ 为仿射映射。

反之，设 ϕ 为仿射映射，对于任意的 X，Y，

$$\nabla_X Y = 0 \Rightarrow \bar{\nabla}_{\phi_*(X)}\phi_*(Y) = 0$$

成立。考虑从 p 出发的曲线 c，设 $\dot c(t)=X$，则 $\phi_*(X)$ 的积分曲线为 $\gamma=\phi(c)$。将 $Y(p)\in T_p(M)$ 沿 c 平行移动而得的向量场设为 $c_t(Y)=Y(t)$，则 $\nabla_X Y=0$，故

$$\bar{\nabla}_{\phi_*(X)}\phi_*(Y) = 0$$

故 $\phi_*(Y)$ 沿 γ 平行。即将 $\phi_*(Y)$ 平行移动可得 $\phi_*(Y(t))=\phi_*(c_t(Y))$。此事实的含义是

$$\phi_*(c(Y)) = \gamma(\phi_*(Y)) = \phi(c)(\phi_*(Y))$$

§16. 等距变换

例题 1. 设 $\{M_1^n, g\}$，$\{M_2^n, h\}$ 为有相同数量曲率的常曲率空间；p，q 为 M_1^n，M_2^n 的任意点；$\{X_i\}$，$\{Y_i\}$ 分别为 $T_p(M_1)$，$T_q(M_2)$ 的任意标准正交基。这时，唯一地存在从 p 的邻域到 q 的邻射 ϕ 域的等距映使得 $q=\phi(p)$，$Y_i=\phi_*(X_i)$。

解. 设 $\{U, x^\lambda\}$，$\{V, y^\lambda\}$ 为 p,q 的坐标邻域，又设

$$X_i = \xi_i^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_p, \qquad Y_i = \eta_i^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda}\right)_q,$$

则在U，V里分别作坐标系的线性变换可使

$$x^\lambda(p)=y^\lambda(q)=0,$$

$$\xi_i{}^\lambda=\eta_i{}^\lambda=\delta_i{}^\lambda,\quad i=1,\ \cdots,\ n.$$

对于这样的坐标系，求 ϕ：$\{x^\lambda\}\to\{y^\lambda\}$. 首先因 X_i，Y_i 在 p，q 与坐标曲线相切，故

$$g_{\lambda\mu}(p)=h_{\lambda\mu}(q)=\delta_{\lambda\mu}.$$

现在考虑有 $n+n^2$ 个未知函数 y^λ，$y_\alpha{}^\lambda$ 的偏微分方程

$$\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha}=y_\alpha{}^\lambda, \tag{1}$$

$$\frac{\partial y_\beta{}^\lambda}{\partial x^\gamma}=y_\alpha{}^\lambda\begin{Bmatrix}\alpha\\\beta\gamma\end{Bmatrix}-y_\beta{}^\mu y_\gamma{}^\nu\begin{Bmatrix}\lambda\\\mu\nu\end{Bmatrix}' \tag{2}$$

并满足附加条件

$$g_{\alpha\beta}=h_{\lambda\mu}y_\alpha{}^\lambda y_\beta{}^\mu \tag{3}$$

式中 $\begin{Bmatrix}\lambda\\\mu\nu\end{Bmatrix}'$ 为由 $h_{\lambda\mu}$ 作成的克氏记号.

首先，（1）的可积条件：

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\beta}\right)=0$$

由（1），（2）恒等地满足。其次（3）对 x^γ 求偏导数而得之式

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}=\frac{\partial h_{\lambda\mu}}{\partial y^\nu}\ \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}y_\alpha{}^\lambda y_\beta{}^\mu+h_{\lambda\mu}\left(\frac{\partial y_\alpha{}^\lambda}{\partial x^\gamma}y_\beta{}^\mu+y_\alpha{}^\lambda\frac{\partial y_\beta{}^\mu}{\partial x^\gamma}\right) \tag{4}$$

也由（1），（2），（3）恒等地满足。原因是由（1），（2），（3）与

$$\frac{\partial h_{\lambda\mu}}{\partial y^\nu}=\begin{Bmatrix}\varepsilon\\\lambda\nu\end{Bmatrix}'h_{\varepsilon\mu}+\begin{Bmatrix}\varepsilon\\\nu\mu\end{Bmatrix}'h_{\lambda\varepsilon}$$

可见，（4）的右边变形如下.

$$\begin{aligned}（4）的右边=&\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon\\\lambda\nu\end{Bmatrix}'h_{\varepsilon\mu}+\begin{Bmatrix}\varepsilon\\\nu\mu\end{Bmatrix}'h_{\lambda\varepsilon}\right)y_\gamma{}^\nu y_\alpha{}^\lambda y_\beta{}^\mu+h_{\lambda\mu}\left(y_\varepsilon{}^\lambda\begin{Bmatrix}\varepsilon\\\alpha\gamma\end{Bmatrix}\right.\\&\left.-y_\alpha{}^\varepsilon y_\gamma{}^\nu\begin{Bmatrix}\lambda\\\varepsilon\nu\end{Bmatrix}'\right)y_\beta{}^\mu+h_{\lambda\mu}y_\alpha{}^\lambda\left(y_\varepsilon{}^\mu\begin{Bmatrix}\varepsilon\\\beta\gamma\end{Bmatrix}-y_\beta{}^\varepsilon y_\gamma{}^\nu\begin{Bmatrix}\mu\\\varepsilon\nu\end{Bmatrix}'\right)\end{aligned}$$

$$= h_{\lambda\mu} y_\varepsilon{}^\lambda y_\beta{}^\mu \left\{ {\varepsilon \atop \alpha\gamma} \right\} + h_{\lambda\mu} y_\alpha{}^\lambda y_\varepsilon{}^\mu \left\{ {\varepsilon \atop \beta\gamma} \right\}$$

$$= g_{\varepsilon\beta} \left\{ {\varepsilon \atop \alpha\gamma} \right\} + g_{\alpha\varepsilon} \left\{ {\varepsilon \atop \beta\gamma} \right\}$$

$$= \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} .$$

最后考虑（2）的可积条件：

$$\frac{\partial}{\partial x^\delta}\left(\frac{\partial y_\beta{}^\lambda}{\partial y^\gamma}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(\frac{\partial y_\beta{}^\lambda}{\partial x^\delta}\right) = 0 \qquad (5)$$

由（1），（2）可见

$$\text{左边} = y_\alpha{}^\lambda R_{\delta\gamma\beta}{}^\alpha - y_\beta{}^\mu y_\gamma{}^\nu y_\delta{}^\omega R'_{\omega\nu\mu}{}^\lambda \qquad (6)$$

式中 $R'_{\omega\nu\mu}{}^\lambda$ 是 $h_{\lambda\mu}$ 的曲率张量。然而根据假设

$$R_{\delta\gamma\beta}{}^\alpha = -k(g_{\delta\beta}\delta_\gamma{}^\alpha - g_{\gamma\beta}\delta_\delta{}^\alpha), \quad R'_{\omega\nu\mu}{}^\lambda = -k(h_{\omega\mu}\delta_\nu{}^\lambda - h_{\nu\mu}\delta_\omega{}^\lambda)$$

成立，故由（3）知（6）的右边为0。从而（5）得到满足。

由以上讨论可知（1）～（3）是完全可积的，故在 $x^\lambda = 0$ 的邻域里唯一地存在具有"当 $x^\lambda = 0$ 时，满足（3）的初始值 $y^\lambda = 0$，$y_\alpha{}^\lambda = \delta_\alpha{}^\lambda$"的解

$$y^\lambda = y^\lambda(x), \qquad y_\alpha{}^\lambda = y_\alpha{}^\lambda(x) = \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha} .$$

现在对于 p 的邻域的点 x^λ 以 q 的邻域的点 $y^\lambda(x)$ 对应之。因为 $y_\alpha{}^\lambda(0) = \delta_\alpha{}^\lambda$，故在 p 的邻域里 $\det(\partial y/\partial x) \neq 0$。故在这里此对应 ϕ 为微分同构映射，而且由（3）可知

$$g_{\alpha\beta} = h_{\lambda\mu} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta}$$

成立，因此是等距映射。又因 $\phi_*(X_i)$的分量为

$$\left(\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^\mu}\right)_p \xi_i{}^\mu = y_\mu{}^\lambda(0)\delta_i{}^\mu = \delta_\mu{}^\lambda \delta_i{}^\mu = \delta_i{}^\lambda$$

可见 $\phi_*(X_i) = Y_i$。

例题 2. 在X生成的等距变换群的各轨道上，开玲向量X之长一定。

解. 设 $X=(\xi^\lambda)$。因 X 为开玲向量，故

$$\nabla_\mu\xi_\alpha+\nabla_\alpha\xi_\mu=0.$$

因为轨道 $x^\lambda=x^\lambda(t)$ 的切向量是 $\xi^\lambda=dx^\lambda/dt$，所以

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|X\|^2&=\frac{d}{dt}(\xi_\alpha\xi^\alpha)=\frac{dx^\mu}{dt}\nabla_\mu(\xi_\alpha\xi^\alpha)\\&=\xi^\mu(\nabla_\mu\xi_\alpha\xi^\alpha+\xi_\alpha\nabla_\mu\xi^\alpha)=2\xi^\mu\xi^\alpha\nabla_\mu\xi_\alpha\\&=\xi^\mu\xi^\alpha(\nabla_\mu\xi_\alpha+\nabla_\alpha\xi_\mu)=0.\end{aligned}$$

§17. 共 形 变 换

例题 1. 设黎曼空间 $\{M^n, g\}$ 的共形曲率张量 $\hat{C}=(C_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa)$到处不为 0 。这时考虑由

$$g'=\|\hat{C}\|g$$

定义的黎曼度量 g'，则关于 g 的共形变换是关于 g' 的等距变换。

解. 设 $\phi: M^n\to M^n$ 关于 g 的共形变换。取坐标系使在对应点p，$\bar{p}=\phi(p)$ 具有相同坐标，则

$$\bar{g}=\Phi(g)=(\bar{g}_{\lambda\mu})$$

由

$$\bar{g}_{\lambda\mu}=e^{2\rho}g_{\lambda\mu}$$

而定，

$$\bar{C}_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa=C_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa$$

成立。因此

$$\begin{aligned}\|\hat{\bar{C}}\|^2&=\bar{C}_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa\bar{C}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta\bar{g}^{\lambda\alpha}\bar{g}^{\mu\beta}\bar{g}^{\nu\gamma}\bar{g}_{\kappa\delta}\\&=C_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa C_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta e^{-4\rho}g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}g^{\nu\gamma}g_{\kappa\delta}=e^{-4\rho}\|\hat{C}\|^2,\\\therefore\quad \|\hat{\bar{C}}\|_p&=e^{-2\rho}\|\hat{C}\|_p.\end{aligned}$$

另一方面，因为 $g_{\lambda\mu}(\bar{p})=\bar{g}_{\lambda\mu}(p)$，所以 $C_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa(\bar{p})=\bar{C}_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa(p)$，即

$$\|\hat{C}\|_{\bar{p}}=\|\hat{\bar{C}}\|_p$$

成立。故

$$\Phi(\|\hat{C}\|g)=\|\hat{C}\|_{\bar{p}}\Phi(g)=\|\hat{C}\|_{\bar{p}}\bar{g}$$

$$=\|\hat{\hat{C}}\|_p e^{2\rho} g=\|\hat{C}\|_p g$$

因此 ϕ 关于 $g'=\|\hat{C}\|g$ 是等距变换。

例题 2. 比较线素，试证从 $S^n(k):(x^1)^2+\cdots\cdots+(x^{n+1})^2=k^2$ 的北极 p_0 的极射影

$\phi: S^n(k)-\{p_0\}\to E^n$

是共形映射。

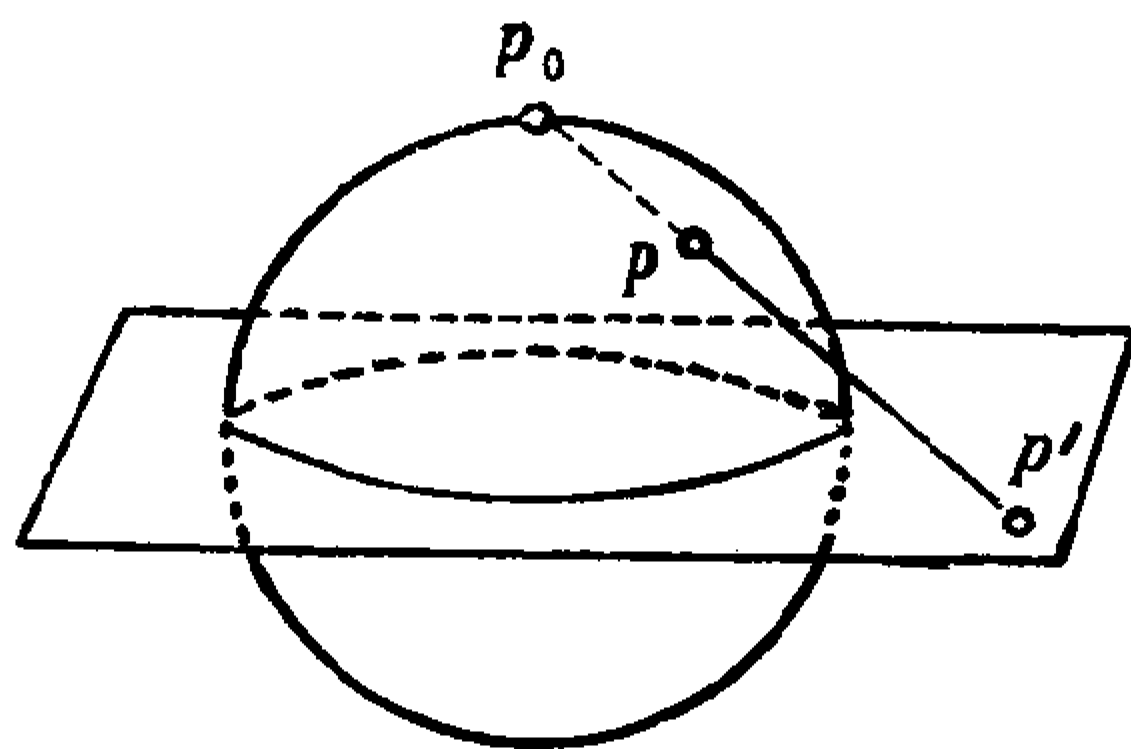


图 7

解. 在图里设 $p_0(0,\cdots,0,k)$，$p(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})$，$p'(y^1,\cdots y^n,0)$，$\overrightarrow{p_0p}=(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1}-k)$，$\overrightarrow{p_0p'}=(y^1,\cdots,y^n,-k)$，故

$$\frac{y^1}{x^1}=\cdots=\frac{y^n}{x^n}=\frac{k}{k-x^{n+1}}$$

由此得

$$y^a=\frac{kx^a}{k-x^{n+1}},\quad a=1,\cdots,n.$$

故

$$dy^a=k\frac{(k-x^{n+1})dx^a+x^a dx^{n+1}}{(k-x^{n+1})^2},$$

$$\sum_{a=1}^{n}(dy^a)^2$$

$$=k^2\frac{(k-x^{n+1})^2\sum(dx^a)^2+2(k-x^{n+1})dx^{n+1}\sum x^a dx^a+\sum(x^a)^2(dx^{n+1})^2}{(k-x^{n+1})^4}$$

然因 $\sum(x^a)^2=k^2-(x^{n+1})^2$，$\sum x^a dx^a=-x^{n+1}dx^{n+1}$ 故

$$\sum(dy^a)^2$$

$$=k^2\frac{(k-x^{n+1})\sum(dx^a)^2-2x^{n+1}(dx^{n+1})^2+(k+x^{n+1})(dx^{n+1})^2}{(k-x^{n+1})^3}$$

$$=\frac{k^2}{(k-x^{n+1})^2}\left(\sum(dx^a)^2+(dx^{n+1})^2\right).$$

另外，$S^n(k)$ 的度量 g_{ab} 是从 E^{n+1} 的度量而来的诱导度量，故

$$g_{ab}dx^a dx^b = \sum_{\lambda=1}^{n+1}(dx^\lambda)^2$$

成立。从而

$$\Sigma(dy^a)^2 = \frac{k^2}{(k-x^{n+1})^2} g_{ab}dx^a dx^b.$$

左边是 E^n 的度量，故 $\phi:\{x^a\}\to\{y^a\}$ 是共形映射.

§18. 射影变换

例题 1. 在对称仿射联络的射影对应下，下列张量 $\hat{P} = (P_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa)$ 不变，称之为射影曲率张量。

$$P_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa = K_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa + \frac{1}{n-1}(K_{\lambda\nu}\delta_\mu{}^\kappa - K_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\kappa)$$

$$+\frac{1}{n^2-1}(B_{\lambda\nu}\delta_\mu{}^\kappa - B_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\kappa) - \frac{1}{n+1}B_{\lambda\mu}\delta_\nu{}^\kappa.$$

式中 $K_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa$ 为曲率张量，

$$K_{\mu\nu} = K_{\varepsilon\mu\nu}{}^\varepsilon,\quad B_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu\varepsilon}{}^\varepsilon.$$

解. 在射影对应 $\overset{*}{\Gamma}{}_\mu{}^\lambda{}_\nu = \overset{*}{\Gamma}{}_\mu{}^\lambda{}_\nu + \psi_\mu\delta_\nu{}^\lambda + \psi_\nu\delta_\mu{}^\lambda$ 下，从 (18.5) 可见

$$\overset{*}{K}_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa = K_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa + \psi_{\lambda\nu}\delta_\mu{}^\kappa - \psi_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\kappa + (\psi_{\lambda\mu} - \psi_{\mu\lambda})\delta_\nu{}^\kappa. \qquad (1)$$

λ 与 κ 缩短之得

$$\overset{*}{K}_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} - (n-1)\psi_{\mu\nu} - (\psi_{\mu\nu} - \psi_{\nu\mu}), \qquad (2)$$

在（1）里 ν 与 κ 缩短之得

$$\overset{*}{B}_{\lambda\mu} = B_{\lambda\mu} + (n+1)(\psi_{\lambda\mu} - \psi_{\mu\lambda})$$

故

$$\psi_{\lambda\mu} - \psi_{\mu\lambda} = \frac{1}{n+1}(\overset{*}{B}_{\lambda\mu} - B_{\lambda\mu}) \qquad (3)$$

代入（2）得

$$\psi_{\mu\nu}=\frac{1}{n-1}\left\{-(\overset{*}{K}_{\mu\nu}+\frac{1}{n+1}\overset{*}{B}_{\mu\nu})+(K_{\mu\nu}+\frac{1}{n+1}B_{\mu\nu})\right\}. \quad (4)$$

将（3），（4）代入（1）可得 $\overset{*}{P}_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=P_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}$。

例题 2. 在数量曲率R不是0的 n（>1）维爱因斯坦空间里，射影开玲向量 ξ^{λ}

$$\mathscr{L}_{\xi}\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}=\psi_{\mu}\delta_{\nu}{}^{\lambda}+\psi_{\nu}\delta_{\mu}{}^{\lambda}$$

可唯一地写做

$$\xi_{\lambda}=\eta_{\lambda}+\zeta_{\lambda}$$

式中 η_{λ} 为开玲向量，ζ_{λ} 为梯度。这时 ζ^{λ} 也是射影开玲向量，而且

$$\zeta_{\lambda}=-\frac{n(n-1)}{2R}\psi_{\lambda}$$

成立。

解. $\mathscr{L}_{\xi}R_{\mu\nu}=-(n-1)\nabla_{\mu}\psi_{\nu}$ 成立，而且是爱因斯坦空间，故

$$\frac{R}{n}\mathscr{L}_{\xi}g_{\mu\nu}=-(n-1)\nabla_{\mu}\psi_{\nu},$$

即

$$\nabla_{\mu}\xi_{\nu}+\nabla_{\nu}\xi_{\mu}=-\frac{n(n-1)}{R}\nabla_{\mu}\psi_{\nu}$$

$$=-\frac{n(n-1)}{2R}(\nabla_{\mu}\psi_{\nu}+\nabla_{\nu}\psi_{\mu}).$$

故令

$$\xi_{\lambda}+\frac{n(n-1)}{2R}\psi_{\lambda}=\eta_{\lambda}$$

则得 $\nabla_{\mu}\eta_{\nu}+\nabla_{\nu}\eta_{\mu}=0$，因此 η_{λ} 为开玲张量。令

$$\zeta_{\lambda}=-\frac{n(n-1)}{2R}\psi_{\lambda}$$

则 ζ_{λ} 为梯度，故得

$$\xi_\lambda=\eta_\lambda+\zeta_\lambda.$$

再者，

$$\mathcal{L}_\xi\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}=\psi_\mu\delta_\nu{}^\lambda+\psi_\nu\delta_\mu{}^\lambda$$

$$=\mathcal{L}_{\eta+\zeta}\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}=\mathcal{L}_\eta\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}+\mathcal{L}_\zeta\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}=\mathcal{L}_\zeta\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}.$$

$$\therefore\quad \mathcal{L}_\zeta\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}=\psi_\mu\delta_\nu{}^\lambda+\psi_\nu\delta_\mu{}^\lambda$$

成立，故 ζ^λ 为射影开玲向量。

以下证明唯一性。现在设 ξ_λ 可用开玲向量 $\eta_\lambda,\eta_\lambda'$ 以及梯度 $\zeta_\lambda,\zeta_\lambda'$ 可写如

$$\xi_\lambda=\eta_\lambda+\zeta_\lambda=\eta_\lambda'+\zeta_\lambda'.$$

由此得

$$\eta_\lambda-\eta_\lambda'=\zeta_\lambda'-\zeta_\lambda$$

$$\therefore\quad \nabla_\mu(\eta_\lambda-\eta_\lambda')=\nabla_\mu(\zeta_\lambda'-\zeta_\lambda).$$

然而 $\eta_\lambda-\eta_\lambda'$ 是开玲向量，故左边关于 μ，λ 反称。另外 $\zeta_\lambda'-\zeta_\lambda$ 是梯度，故右边关于 μ，λ 对称。因此两边都是 0，从而 $\eta_\lambda-\eta_\lambda'$ 是平行向量场。再由习题三第38题，$R\neq 0$ 的爱因斯坦空间的平行向量场只有零向量场，故 $\eta_\lambda=\eta_\lambda'$。即 $\zeta_\lambda=\zeta_\lambda'$ 可得唯一性。

习　题　四

1. 如 X，Y 为仿射开玲向量，则 $aX+bY$ 也是如此。其中 a，$b\in R$。

2. 在黎曼空间里，如 X，Y 为仿射开玲向量，则 $[X,\ Y]$ 也是如此。故仿射开玲向量的全体作成李代数。

3. 在黎曼空间里，李导数与黎曼联络间下列公式成立。

(i) $\mathcal{L}_X f=\xi^\alpha\nabla_\alpha f=Xf.$

(ii) $\mathcal{L}_X\eta^\lambda=\xi^\alpha\nabla_\alpha\eta^\lambda-\eta^\alpha\nabla_\alpha\xi^\lambda.$

(iii) $\mathcal{L}_X u_\lambda=\xi^\alpha\nabla_\alpha u_\lambda+u_\alpha\nabla_\lambda\xi^\alpha.$

(iv) $\mathcal{L}_X T_{\lambda\mu}{}^\kappa=\xi^\alpha\nabla_\alpha T_{\lambda\mu}{}^\kappa+T_{\alpha\mu}{}^\kappa\nabla_\lambda\xi^\alpha+T_{\lambda\alpha}{}^\kappa\nabla_\mu\xi^\alpha-T_{\lambda\mu}{}^\alpha\nabla_\alpha\xi^\kappa.$

4. 在李导数与黎曼联络之间下列诸公式成立。

(i) $\nabla_\lambda \mathcal{L}_X \eta^\mu - \mathcal{L}_X \nabla_\lambda \eta^\mu = -\eta^\alpha \mathcal{L}_X \left\{ {\mu \atop \lambda\alpha} \right\}$.

(ii) $\nabla_\lambda \mathcal{L}_X u_\mu - \mathcal{L}_X \nabla_\lambda u_\mu = u_\alpha \mathcal{L}_X \left\{ {\alpha \atop \lambda\mu} \right\}$.

(iii) $\nabla_\lambda \mathcal{L}_X T_\mu{}^\kappa - \mathcal{L}_X \nabla_\lambda T_\mu{}^\kappa = -T_\mu{}^\alpha \mathcal{L}_X \left\{ {\kappa \atop \lambda\alpha} \right\} + T_\alpha{}^\kappa \mathcal{L}_X \left\{ {\alpha \atop \lambda\mu} \right\}$.

(iv) $\mathcal{L}_X \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = (1/2) g^{\lambda\varepsilon} (\nabla_\nu \mathcal{L}_X g_{\mu\varepsilon} + \nabla_\mu \mathcal{L}_X g_{\nu\varepsilon} - \nabla_\varepsilon \mathcal{L}_X g_{\mu\nu})$

$$= \nabla_\mu \nabla_\nu \xi^\lambda + R_{\alpha\mu\nu}{}^\lambda \xi^\alpha.$$

(v) $\nabla_\lambda \mathcal{L}_X \left\{ {\kappa \atop \mu\nu} \right\} - \nabla_\mu \quad {}_X \left\{ {\kappa \atop \lambda\nu} \right\} = \mathcal{L}_X R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa$.

5. 关于黎曼空间的仿射开玲向量 X，

$$\mathcal{L}_X R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa = 0, \quad \mathcal{L}_X R_{\mu\nu} = 0$$

成立。

6. 关于仿射开玲向量 $X = (\xi^\lambda)$，

(i) $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \xi^\lambda + R_\alpha{}^\lambda \xi^\alpha = 0$,

(ii) $\nabla_\lambda \nabla_\alpha \xi^\alpha = 0$

成立。式中设 $\nabla^\alpha = g^{\alpha\varepsilon} \nabla_\varepsilon$，$R_\alpha{}^\lambda = R_{\alpha\varepsilon} g^{\varepsilon\lambda}$。

注意。因为 M^n 连通，所以从 (ii) 得 $\nabla_\alpha \xi^\alpha$ 是常数。

7. 如仿射开玲向量 ξ^λ 在一点 p_0 满足 $\xi^\lambda(p_0) = 0$，$(\partial \xi^\lambda / \partial x^\mu)_{p_0} = 0$，则对于任意的 r

$$(\partial^r \xi^\kappa / \partial x^{\lambda_1} \cdots \partial x^{\lambda_r})_{p_0} = 0$$

8. 将球面 $S^n(k)$ 的直径对点等同之而得射影空间 P^n，使用 $S^n(k)$ 的原来黎曼度量则得黎曼空间。

注意。因此 $S^n(k)$ 与 P^n 是局部等距同胚。

9. 设 ϕ 为等距映射，则 X 与 Y 的夹角与 $\phi_*(X)$ 与 $\phi_*(Y)$ 的夹角相等。

10. 设 $\phi: M^n \to \overline{M}^n$ 为从微分流形 M^n 到黎曼空间 $\{\overline{M}^n, \overline{g}\}$ 的微分同胚映射。这时在 M^n 上关于 $\Phi(\overline{g})$ 的黎曼联络与 $\overline{M}^n$ 的黎曼联

络在 ϕ 下的诱导联络一致。

11. 在前题假设下，设 $\overset{*}{g}=\Phi(\bar{g})$，则 $\bar{g}$，$\overset{*}{g}$ 的数量曲率之间 $\overset{*}{R}(p)=\bar{R}(\phi(p))$ 成立。

12. 在等距映射下断面曲率不变。

13. 设 $I(M^n)$ 为黎曼空间 M^n 的等距变换群，设 G_p 为不变动一点 p 的等距变换全体所作子群，再设 $dG_p=\{\phi_*|\phi\in G_p\}$。这时

(i) dG_p 为 $T_p(M)$ 的正交变换群 $O(T_p(M))$ 的子群。

(ii) 如当 $n>2$，在各点 p，$dG_p=O(T_p(M))$，则 M^n 为常曲率空间。

注意。G_p,dG_p 分别称为 $I(M^n)$ 在 p 处的**迷向子群**，**线性迷向群**。

14. 如开玲向量 X 之长在一点 p_0 取最大（小）值，则 p_0 的轨道为测地线。

15. 并进变换群的轨道是测地线。

16. 沿测地线 c，开玲向量与 $\dot{c}$ 的内积一定。

17. E^n 的并进变换是平行移动。

18. 对于开玲向量 X，

$$\mathscr{L}_X R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=0,\quad \mathscr{L}_X R_{\mu\nu}=0,\quad \mathscr{L}_X R=0.$$

在 X 生成的等距变换群的各轨道上，R，$R_{\lambda\mu}R^{\lambda\mu}$，$R_{\lambda\mu\nu\omega}R^{\lambda\mu\nu\omega}$ 一定。

19. 设 X，Y 为开玲向量场，则 $aX+bY$，$[X, Y]$ 也是开玲向量。故 M^n 的开玲向量全体 $dI(M)$ 作成李代数。

20. 对于 M^n 的任意的点 p 与任意的元 $A\in T_p(M)$，如存在 $X_p=A$ 的 $X\in dI(M)$，则称 $dI(M)$ 是**可递**的。这时 M^n 的数量曲率是常数。

21. 设 Z 为 M^n 的向量场 X 在 TM 上的开拓（参照 §7 例题 2）。这时 X 为开玲向量的充要条件是

$$\mathscr{L}_Z\eta_A=0.$$

式中的 η_A 是由

$$\eta_\lambda=g_{\lambda\alpha}y^\alpha;\quad \eta_{n+\lambda}=0\ \text{（参照 §10 例题 3）}$$

定义 TM 上的共变向量场。

22. 关于共形对应 $\overset{*}{g}=e^{2\rho}g$，$\overset{*}{C}_{\lambda\mu\nu}=C_{\lambda\mu\nu}+(n-2)C_{\mu\lambda\nu}{}^{\varepsilon}\rho_{\varepsilon}$。

23. 在 $C_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}$，$C_{\lambda\mu\nu}$ 之间下式成立。

$$\nabla_{\varepsilon}C_{\lambda\mu\nu}{}^{\varepsilon}=\frac{n-3}{n-2}C_{\lambda\mu\nu}.$$

24. 当 $n=2$ 时，$L_{\lambda\mu}=R_{\lambda\mu}-\dfrac{R}{2(n-1)}g_{\lambda\mu}$ 与 $C_{\lambda\mu\nu}=\nabla_{\lambda}L_{\mu\nu}-\nabla_{\mu}L_{\lambda\nu}$ 恒等于0。

25. 关于共形曲率张量下式成立：

$$\nabla_{\lambda}C_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}+\nabla_{\mu}C_{\nu\lambda\alpha}{}^{\beta}+\nabla_{\nu}C_{\lambda\mu\alpha}{}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{n-2}(C_{\lambda\mu\alpha}\delta_{\nu}^{\beta}+C_{\mu\nu\alpha}\delta_{\lambda}^{\beta}+C_{\nu\lambda\alpha}\delta_{\mu}^{\beta}-C_{\lambda\mu}{}^{\beta}g_{\nu\alpha}-C_{\mu\nu}{}^{\beta}g_{\lambda\alpha}-C_{\nu\lambda}{}^{\beta}g_{\mu\alpha}).$$

26. 在共形对应下，由

$$K_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}=\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}-\frac{1}{n}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\alpha\end{Bmatrix}\delta_{\nu}^{\lambda}-\frac{1}{n}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \nu\alpha\end{Bmatrix}\delta_{\mu}^{\lambda}+\frac{1}{n}g^{\lambda\alpha}\begin{Bmatrix}\beta\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}g_{\mu\nu}$$

给定的量不变。

27. 共形平坦爱因斯坦空间（$n>2$）是常曲率空间。

28. 直积黎曼空间 $M^n=M^r\times M^s$ 是共形平坦的充要条件是 M^r，M^s 都是常曲率空间，而且其数量曲率 R_1，R_2 之间有下列关系。

$$\frac{R_1}{r(r-1)}+\frac{R_2}{s(s-1)}=0.$$

29. 当 $n>2$ 时，共形对应 $\overset{*}{g}=e^{2\rho}g$ 将共圆曲率张量 $\hat{Z}=(Z_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa})$：

$$Z_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}+\frac{R}{n(n-1)}(g_{\lambda\nu}\delta_{\mu}^{\kappa}-g_{\mu\nu}\delta_{\lambda}^{\kappa})$$

保持不变的充要条件是存在函数 σ 使得

$$\rho_{\lambda\mu}\equiv\nabla_{\lambda}\rho_{\mu}-\rho_{\lambda}\rho_{\mu}+\frac{1}{2}\rho_{\varepsilon}\rho^{\varepsilon}g_{\lambda\mu}=\sigma g_{\lambda\mu}$$

成立。**注意**。这样的共形对应称为**共圆对应**。

30. 当 $\{M^n,g\}(n>2)$ 为爱因斯坦空间时，则在共形对应 $\overset{*}{g}=e^{2\rho}g$ 下，$\{M^n,\overset{*}{g}\}$ 仍为爱因斯坦空间的充要条件是此对应为共圆对应。

31. 对于共形开玲向量 X，满足 $\mathscr{L}_X g=2\rho g$ 的函数 ρ 由 X 而定，以 ρ_X 记之。这时对于共形开玲向量 X, Y, Z，下式成立。

(i)　$aX+bY$ 也是共形开玲张量而且

$$\rho_{aX+bY}=a\rho_X+b\rho_Y.$$

(ii)　$[X,Y]$ 也是共形开玲向量而且

$$\rho_{[X,Y]}=X\rho_Y-Y\rho_X$$

(iii)　如由 $[\rho_X,\rho_Y]=\rho_{[X,Y]}$ 定义 ρ_X 与 ρ_Y 之积 $[,]$ 则

$$[a\rho_X+b\rho_Y,\rho_Z]=a[\rho_X,\rho_Z]+b[\rho_Y,\rho_Z],$$

$$[\rho_X,\rho_Y]=-[\rho_Y,\rho_X],$$

$$[\rho_X,[\rho_Y,\rho_Z]]+[\rho_Y,[\rho_Z,\rho_X]]+[\rho_Z,[\rho_X,\rho_Y]]=0.$$

注意. 因此共形开玲向量的全体，以及 ρ_X 的全体关于 $[,]$ 作成李代数。

32. 对于共形开玲向量 X

$$\mathscr{L}_X C_{\lambda\mu\nu}=(n-2)C_{\lambda\mu\nu}{}^{\varepsilon}\rho_{\varepsilon}.$$

33. $X=(\xi^\lambda)$，$\lambda=1,2$，为二维欧氏空间 E^2 的共形开玲向量的充要条件是 ξ^1,ξ^2 满足柯西·黎曼微分方程

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x}=\frac{\partial\xi^2}{\partial y},\qquad \frac{\partial\xi^1}{\partial y}=-\frac{\partial\xi^2}{\partial x}.$$

其中 x，y 为直角坐标。

34. 对于共形开玲向量 X：$\mathscr{L}_X g=2\rho g$，X 生成的共形变换群 $\{\phi_t\}$ 的轨道设为 c，则

$$\nabla_c f=2\rho f,\qquad f=\|X\|^2$$

成立。故如在 c 上一点 p_0，f 取最大值（$\neq 0$）时，则 $\rho(p_0)=0$。

35. 在数量曲率 R 不为 0 的 $n(>2)$ 维爱因斯坦空间里，共形开玲向量 ξ^λ：

$$\mathscr{L}_\xi g_{\lambda\mu}=2\rho g_{\lambda\mu}$$

可唯一地写做

$$\xi_\lambda=\eta_\lambda+\zeta_\lambda.$$

式中的 η_λ 是开玲向量，ζ_λ 是梯度。此时 ζ_λ 也是共形开玲向量，

$$\zeta_\lambda = -\frac{n(n-1)}{R}\rho_\lambda$$

成立。

36. 设 L，L_1 分别为共形开玲向量与开玲向量全体所作的李代数。设 L_2 为梯度同时又是共形开玲向量的全体作成的向量空间。在前题假设下，下式成立。

(i) $L = L_1 + L_2$（直和），　　(ii) $[L_1, L_1] \subset L_1$，

(iii) $[L_1, L_2] \subset L_2$，　　(iv) $[L_2, L_2] \subset L_1$。

37. 由§17 例题 2 的极射影 ϕ 与 E^n 的相似变换群 $\{\phi_t\}$：

$$\phi_t: \{x^\lambda\} \to \{e^t x^\lambda\}$$

作成的 $S^n(k) - \{p_0\}$ 的共形变换群为 $\{\psi_t\}: \psi_t = \phi^{-1} \circ \phi_t \circ \phi$（参照黎曼几何§17的例）。关于 $U^{\pm}_{n+1}$ 里的局部坐标系 $\{x^a\}$，$a = 1, \cdots, n$，$\{\psi_t\}$ 诱导的共形开玲向量的分量由

$$-\frac{x^{n+1}x^a}{k}$$

而定。

38. 关于球面 $S^n(1)$，$S^n(k)$，如由 $\overline{x}^\lambda = kx^\lambda$ 定义 $\phi: S^n(1) \to S^n(k)$，则 ϕ 为相似映射。

39. 用参数表示

$$x = \cos u \sin v, \qquad y = \sin u \sin v, \qquad z = \cos v$$

表达 $S^2(1)$：$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 时，则

(i) $ds^2 = \sin^2 v du^2 + dv^2$，

(ii) 如共形变换 $(u, v) \to (u, \overline{v})$：

$$\sin^2 \overline{v} du^2 + d\overline{v}^2 = \sigma^2(\sin^2 v du^2 + dv^2)$$

中的 $\overline{v}$ 只是 v 的函数，则

$$\tan\frac{v}{2}\tan\frac{\overline{v}}{2} = C, \qquad \text{或} \quad \tan\frac{\overline{v}}{2} = C\tan\frac{v}{2}$$

成立

40. 共形平坦黎曼空间（$n>2$）的线素是

$$ds^2=\frac{1}{f^2}((dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2),\quad f=f(x^1,\cdots,x^n)>0$$

的形状。因为常曲率空间是共形平坦的，所以利用这种形状求 f 可得

$$f=X_1+\cdots+X_n,$$

$$X_\lambda=a(x^\lambda)^2+2b_\lambda x^\lambda+c_\lambda\ (\lambda\ \text{不求和}).$$

式中 a,b_λ,c_λ 是满足

$$k=\frac{R}{n(n-1)}=4\sum_{\lambda=1}^{n}(ac_\lambda-b_\lambda{}^2)$$

的常数。

注意。特别设 $b_\lambda=0,\sum c_\lambda=1$，则得

$$ds^2=\frac{(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2}{\left\{1+\frac{k}{4}((x^1)^2+\cdots+(x^n)^2)\right\}^2}.\qquad (1)$$

故当 $k>0$ 时，$\boldsymbol{R}^n$ 全体根据度量（1）成椭圆常曲率空间，当 $k<0$ 时，$\boldsymbol{R}^n$ 的超球：$(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2<-4/k$ 的内部根据度量（1）成双曲常曲率空间。

其次设 $a=0,b_1=\cdots=b_{n-1}=0,\ b_n=1/2,\ c_1=\cdots=c_n=0$，则 $f=x^n,\ k=-1$，可得

$$ds^2=\frac{(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2}{(x^n)^2}.\qquad (2)$$

$\boldsymbol{R}^n$ 的半平面 $x^n>0$ 根据度量（2）成双曲常曲率空间。

41. 保持道路的仿射参数的射影映射是仿射映射。

42. 如从对称仿射联络 Γ 作出

$$\Pi_{\mu\ \nu}^{\ \lambda}=\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \lambda}-\frac{1}{n+1}(\Gamma_{\alpha\ \mu}^{\ \alpha}\delta_\nu{}^\lambda+\Gamma_{\alpha\ \nu}^{\ \alpha}\delta_\mu{}^\lambda),$$

则 $\Pi_{\mu\ \nu}^{\ \lambda}$ 在射影变换下不变。试证一般地讲在坐标变换下，$\Pi_{\mu\ \nu}^{\ \lambda}$ 不作张量与仿射联络系数的变换。

43. 二维黎曼空间的射影曲率张量恒等于0。

44. 在黎曼空间的射影对应 $\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}^*=\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}+\psi_\mu\delta_\nu{}^\lambda+\psi_\nu\delta_\mu{}^\lambda$ 下，下

式成立。

$$\overset{*}{W}_{\lambda\mu\nu}=W_{\lambda\mu\nu}+(n-1)W_{\lambda\mu\nu}{}^{\varepsilon}\psi_{\varepsilon}.$$

45. 外尔的射影曲率张量满足下式。

$$\nabla_{\lambda}W_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}+\nabla_{\mu}W_{\nu\lambda\alpha}{}^{\beta}+\nabla_{\nu}W_{\lambda\mu\alpha}{}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{n-1}(W_{\lambda\mu\alpha}\delta_{\nu}{}^{\beta}+W_{\mu\nu\alpha}\delta_{\lambda}{}^{\beta}+W_{\nu\lambda\alpha}\delta_{\mu}{}^{\beta}).$$

46. $\nabla_{\varepsilon}W_{\lambda\mu\nu}{}^{\varepsilon}=\dfrac{n-2}{n-1}W_{\lambda\mu\nu}$.

47. 与常曲率空间射影同胚的黎曼空间也是常曲率空间。

48. 如黎曼空间的共形变换同时又是射影变换时，则必是相似变换。

49. 对于射影开玲向量 X，下式成立。

$$\mathscr{L}_{X}W_{\lambda\mu\nu}=(n-1)W_{\lambda\mu\nu}{}^{\varepsilon}\psi_{\varepsilon}.$$

50. 对于射影开玲向量 X，满足

$$\mathscr{L}_{X}\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}=\psi_{\mu}\delta_{\nu}{}^{\lambda}+\psi_{\nu}\delta_{\mu}{}^{\lambda}$$

的 ψ_{μ} 由

$$\psi_{\mu}=\frac{1}{n+1}\nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}\xi^{\alpha},$$

而定，故为梯度。现在记

$$\psi_{X}=\frac{\nabla_{\alpha}\xi^{\alpha}}{n+1}$$

则 $\psi_{\mu}=\partial\psi_{X}/\partial x^{\mu}$。这时对于射影开玲向量 X，Y，Z 下式成立。

(i) $aX+bY$ 也是射影开玲向量而且

$$\psi_{aX+bY}=a\psi_{X}+b\psi_{Y}.$$

(ii) $[X,Y]$ 也是射影开玲向量而且

$$\psi_{[X,Y]}=X\psi_{Y}-Y\psi_{X}$$

(iii) 如由 $[\psi_{X},\psi_{Y}]=\psi_{[X,Y]}$ 定义 ψ_{X} 与 ψ_{Y} 之积 $[,]$，则

$$[a\psi_{X}+b\psi_{Y},\psi_{Z}]=a[\psi_{X},\psi_{Z}]+b[\psi_{Y},\psi_{Z}],$$

$$[\psi_X, \psi_Y] = -[\psi_Y, \psi_X],$$

$$[\psi_X, [\psi_Y, \psi_Z]] + [\psi_Y, [\psi_Z, \psi_X]] + [\psi_Z, [\psi_X, \psi_Y]] = 0.$$

注意。射影开玲向量的全体与 ψ_X 的全体分别作成李代数。

51. 对于射影开玲向量 X，下式成立。

(i) $\nabla_\nu \mathscr{L}_X g_{\lambda\mu} = \psi_\lambda g_{\nu\mu} + \psi_\mu g_{\nu\lambda} + 2\psi_\nu g_{\lambda\mu}$,

(ii) 令 $a_{\lambda\mu} = \mathscr{L}_X g_{\lambda\mu} - 4\psi g_{\lambda\mu}$，则

$$\nabla_\nu a_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda a_{\mu\nu} + \nabla_\mu a_{\nu\lambda} = 0.$$

式中的 ψ 是前题的 ψ_X。

第五章　曲　线　论

§19. 测地线

例题 1. 设 $T_q(M)$ 具有自然微分结构。幂映射 E_q 是从 $T_q(M)$ 的开子流形（含 0 周围的 ε-开球的开集）到 M^n 中的映射。$X=(\xi^\lambda)\in T_q(M)$ 上的向量（参照习题二第 15 题）

$$A=a^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda}\right)_X\in T_X(T_q(M))$$

在 $(E_q)_*$ 下的象由

$$(E_q)_*(A)=a^\mu\frac{\partial\phi^\lambda(x_0,\xi,1)}{\partial\xi^\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_{E_q(X)}$$

而定。式中设 $x_0{}^\lambda$ 为 q 的坐标，ϕ^λ 为在 §19 定义的函数。

解. 设 $Y=a^\lambda(\partial/\partial x^\lambda)_q$，考虑通过 $T_q(M)$ 的 X 的曲线 λ:

$$\lambda(t)=X+tY$$

则其切向量为

$$\dot{\lambda}(0)=A$$

在 E_q 下 λ 的象是

$$x^\lambda=\phi^\lambda(x_0,\xi+ta,1)$$

在 $E_q(X)$ 处其切向量是 $(E_q)_*(A)$，故其分量是

$$\left(\frac{dx^\lambda}{dt}\right)_{t=0}=a^\mu\left[\left(\frac{\partial\phi^\lambda(x,\zeta,1)}{\partial\zeta^\mu}\right)_{\zeta=\xi+ta}\right]_{t=0}$$

$$=a^\mu\frac{\partial\phi^\lambda(x_0,\xi,1)}{\partial\xi^\mu}.$$

§20. 法 坐 标 系

例题 1. 如存在 $\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} x^\mu = 0$ 到处成立的坐标系 $\{U, x^\lambda\}$，则在原点的适当邻域里度量张量的分量是常数。

解. $\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} x^\mu = 0$ 与 $[\mu\nu, \lambda] x^\mu = 0$ 等价。将

$$2[\mu\nu, \lambda] x^\mu = \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) x^\mu = 0,$$

$$2[\mu\lambda, \nu] x^\mu = \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) x^\mu = 0$$

边边相加得

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} x^\mu = 0.$$

因为讨论中的坐标系是法坐标系，所以通过原点 q 的测地线 c 是 $x^\lambda = \xi^\lambda s$ 的形状。故在 c 上（在 $s \neq 0$ 处）

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} \xi^\mu = 0.$$

因 $\xi^\mu = dx^\mu/ds$，故

$$\frac{dg_{\lambda\nu}}{ds} = 0$$

成立，可见在 c 上如 $s \neq 0$ 则 $g_{\lambda\mu}$ 一定。然因 $g_{\lambda\mu}$ 是连续的，故在 q 处也具有相同的值。包含于 U 内 q 的适当邻域 U' 的点可用测地线与 q 连结，故如 $p \in U'$，则得 $g_{\lambda\mu}(p) = g_{\lambda\mu}(q) =$ 一定。

例题 2. 在球面 $S^n(k): (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = k^2$ 的北半球 U_{n+1}^+ 上，局部坐标 $\{x^a\}, a = 1, \cdots, n$，是测地坐标系但不是法坐标系。而由

$$\bar{x}^a = \frac{\arcsin f(x)}{f(x)} x^a, \qquad f(x) = \frac{1}{k} \left\{ \sum_{c=1}^{n} (x^c)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

给定的 $\{\bar{x}^a\}$ 是以北极 p_0 为原点的法坐标系。

解. 由§13 例题2知

$$\left\{ {a \atop bc} \right\} = \frac{1}{k^2} x^a g_{bc},$$

故在北极 $p_0(x^a=0)$ 处 $\left\{ {a \atop bc} \right\} = 0$. 因此 $\{x^a\}$ 是以 p_0 为原点的测地坐标系。此外，除了在 p_0 以外

$$\left\{ {a \atop bc} \right\} x^b x^c = \frac{1}{k^2} x^a g_{bc} x^b x^c$$

并不为0，故不是法坐标系。

$S^n(k)$ 的测地线关于仿射参数 t 是

$$x^a = A^a \sin\left(\frac{l}{k} t\right) + B^a \cos\left(\frac{l}{k} t\right)$$

的形状。其中设 A^a, B^a, l （>0）是常数并设

$$g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = l^2$$

（参照§13 例题2）.

在北极 p_0 设 $t=0$, 则 $B^a=0$. 故从 p_0 出发的测地线是

$$x^a = A^a \sin\left(\frac{l}{k} t\right) \tag{1}$$

又因

$$\dot{x}^a = \frac{l}{k} A^a \cos\left(\frac{l}{k} t\right)$$

故

$$\dot{x}^a(0) = \xi^a = \frac{l}{k} A^a. \tag{2}$$

再将测地线（1）写做

$$x^a = \phi^a(x_0, \xi, t) = \phi^a(0, \xi, t).$$

因

$$l^2 = g_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c = g_{bc}(0) \xi^b \xi^c$$
$$= \delta_{bc} \xi^b \xi^c = \sum \xi^b \xi^b$$

故

$$l=(\sum\xi^b\xi^b)^{1/2}. \qquad (3)$$

如将（2），（3）代入（1），则 ϕ^a 变为下列形状。

$$x^a=\frac{k}{l}\xi^a\sin\left(\frac{l}{k}t\right)$$

$$=\frac{k}{(\sum\xi^b\xi^b)^{1/2}}\xi^a\sin\left(\frac{(\sum\xi^b\xi^b)^{1/2}}{k}t\right)$$

$$=\phi^a(0,\xi,t)=\phi^a(0,\xi t,1). \qquad (4)$$

在（4）里令 $\bar{x}^a=\xi^a t$ 可得法坐标系 $\{\bar{x}^a\}$，故令

$$u(\bar{x})=(\sum\bar{x}^b\bar{x}^b)^{1/2}/k$$

得

$$x^a=\frac{1}{u}\bar{x}^a\sin u. \qquad (5)$$

为从此式解出 $\bar{x}^a$，作（5）式两边的平方和得

$$\sum x^a x^a=\frac{1}{u^2}(\sum\bar{x}^a\bar{x}^a)\sin^2 u=k^2\sin^2 u \qquad (6)$$

因 $u\geqslant 0$，故在 $\pi\geqslant u\geqslant 0$ 的范围内 $\sin u\geqslant 0$。因此

$$\sin u=\frac{1}{k}(\sum x^a x^a)^{1/2}=f(x)$$

$$\therefore\qquad u=\arcsin f(x).$$

将此式代入（5）得

$$\bar{x}^a=\frac{\arcsin f(x)}{f(x)}x^a$$

注意．考虑 $S^1(k):x^2+y^2=k^2$．在图 8 里

$\overline{p_0p_1}=x=k\sin t$，$\overset{\frown}{p_0p}=\overline{p_0p_2}=\bar{x}=kt$。

由此得对应于（6）的式子

$$x^2=k^2\sin^2 t=k^2\sin^2\frac{\bar{x}}{k}.$$

图 8

§21. 变　　分

例题 1. 考虑 $2n$ 变数的函数 $(x,y)=\mathfrak{F}(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)$ 在固定两端点的曲线 c 上的变分 α. 如 $\mathfrak{F}(x,\dot{x})$ 的积分

$$J(v)=\int_{u_1}^{u_2}\mathfrak{F}(x,\dot{x})du$$

不论任何变分 α, 恒满足 $J'(0)=0$, 则 c 满足下列欧拉微分方程

$$\frac{d}{du}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\dot{x}^\lambda}-\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x^\lambda}=0.$$

解. 根据§21 的记号, 设变分 α 为 $x^\lambda=x^\lambda(u,v)$, $\dot{}$, $'$ 分别表示对 u,v 的偏导数. 将

$$J'(v)=\int_{u_1}^{u_2}\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x^\lambda}x^{\lambda\prime}+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\dot{x}^\lambda}\dot{x}^{\lambda\prime}\right)du$$

的第一项分部积分之, 则

$$\int_{u_1}^{u_2}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x^\lambda}x^{\lambda\prime}du=\left(x^{\lambda\prime}\int_{u_1}^{u}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x^\lambda}du\right)_{u_1}^{u_2}-\int_{u_1}^{u_2}\left(\int_{u_1}^{u}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x^\lambda}du\right)\dot{x}^{\lambda\prime}du.$$

然因所论变分是固定两端点的, 故

$$x^{\lambda\prime}(u_1,v)=x^{\lambda\prime}(u_2,v)=0.$$

从而

$$J'(v)=\int_{u_1}^{u_2}\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\dot{x}^\lambda}-\int_{u_1}^{u}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x^\lambda}du\right)\dot{x}^{\lambda\prime}du.$$

现在设不论哪个变分, $J'(0)=0$, 则由下述注意知, 在 c 上可得

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\dot{x}^\lambda}-\int_{u_1}^{u}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x^\lambda}du=\text{常数}$$

故对 u 求导数得

$$\frac{d}{du}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\dot{x}^\lambda}-\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x^\lambda}=0$$

即 c 满足欧拉微分方程。

注意。对于 $\eta(a)=\eta(b)=0$ 的所有函数 $\eta(u)$ ，满足

$$\int_a^b \phi(u)\dot{\eta}(u)du=0 \tag{1}$$

的函数 ϕ 是常数。可以证明如下。现在决定 k 使得

$$\int_a^b (\phi(u)-k)du=0 \tag{2}$$

成立。即设

$$k=\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(u)du$$

再定义 η 为

$$\eta(u)=\int_a^b (\phi(u)-k)du$$

则 $\eta(a)=0$ 而且由 k 的定义可见 $\eta(b)=0$。将此 η 代入（1）得

$$\int_a^b \phi(u)(\phi(u)-k)du=0 \tag{3}$$

故由（2），（3）得

$$\int_a^b (\phi(u)-k)^2du=\int_a^b \phi(u)(\phi(u)-k)du-k\int_a^b(\phi(u)-k)du=0.$$

因此 $\phi(u)=k=$ 常数。

例题 2. 在测地线 c 上，满足

$$\nabla_{\dot{c}}\nabla_{\dot{c}}X+\hat{R}(X,\dot{c})\dot{c}=0$$

的向量场称为 c 上的**雅可比场**. 其中设参数 t 为仿射参数而且

$$\hat{R}(X,\dot{c})\dot{c}=(R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}\xi^{\lambda}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}).$$

在 c 上的点 p 任意给定 v, $w\in T_p(M)$，则唯一地存在满足

$$X_p=v,\quad (\nabla_{\dot{c}}X)_p=w$$

的雅可比场。

解. 设 $\{X_i\}$ 为 $T_p(M)$ 的标准正交基，平行移动之而得 c 上的向量场仍以 $\{X_i\}$ 表示之。$X=\xi^i(t)X_i$ 为雅可比场的条件以 ξ^i 的微分方程表示之。因[1)]

$$\nabla_{\dot c} X=\frac{d\xi^i}{dt}X_i,\ \nabla_{\dot c}\nabla_{\dot c} X=\frac{d^2\xi^i}{dt^2}X_i$$

故 X 为雅可比场的条件是[2)]

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2}X_i+\hat{R}(\xi^jX_j,\dot c)\dot c=0. \qquad (1)$$

现在令 $\hat{R}(X_j,\dot c)\dot c=a_j{}^i(t)X_i$，因 $\{X_i\}$ 在各点是基底，故（1）与下式等价。

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2}+a_j{}^i\xi^j=0.$$

从而，如任意给定初始条件 $\xi^i(0),(d\xi^i/dt)_0$，则 $\xi^i(t)$ 唯一地决定。

注意 2. 雅可比场的定义可与局部坐标系无关，故能够在测地线全体上定义。

例题 3. 如测地线 c 的，未必固定两端点的变分 $\alpha(u,v)$ 的变分曲线全是测地线，而且 u 为各变分曲线的仿射参数时，则变分向量是 c 上的雅可比场。

解. 按§21 的符号，设 $X=\partial\alpha/\partial u$，$Y=\partial\alpha/\partial v$。因各变分曲线是以 u 为仿射参数的测地线，故

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{\partial\alpha}{\partial u}=0.$$

因此

$$\frac{\delta}{\delta v}\frac{\delta}{\delta u}\frac{\partial\alpha}{\partial u}=0.$$

另外与利齐恒等式同理可证

$$\frac{\delta}{\delta v}\frac{\delta}{\delta u}\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\frac{\delta}{\delta u}\frac{\delta}{\delta v}\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\hat{R}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v},\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial u}$$

---

1)，2) 下式中的 d 均应改为 δ（译者注）.

故得

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{\delta}{\delta v}\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\hat{R}(Y,X)X=0.$$

再由定理 11.4（无挠率）知

$$\frac{\delta}{\delta v}\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\frac{\delta}{\delta u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}$$

因此

$$\left(\frac{\delta}{\delta u}\right)^2\frac{\partial\alpha}{\partial v}+\hat{R}(Y,X)X=0$$

又因 $\partial\alpha/\partial v=Y$，在 c 上 $X=\dot{c}$，故得

$$\nabla_{\dot{c}}\nabla_{\dot{c}}Y+\hat{R}(Y,\dot{c})\dot{c}=0$$

可见Y是雅可比场。

§22. 弗雷内·塞雷公式

例题 1. 试求 $\kappa_1=1/s$，$\kappa_2=0$ 的曲线的微分方程。

解. 因设 $\kappa_1=1/s$，$\kappa_2=0$，故由弗雷内·塞雷公式得

$$\nabla_{\dot{c}}X_1=\frac{1}{s}X_2,\qquad \nabla_{\dot{c}}X_2=-\frac{1}{s}X_1.$$

故

$$\nabla_{\dot{c}}\nabla_{\dot{c}}X_1=-\frac{1}{s^2}X_2+\frac{1}{s}\nabla_{\dot{c}}X_2$$

$$=-\frac{1}{s^2}s\nabla_{\dot{c}}X_1+\frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s}X_1\right)$$

$$=-\frac{1}{s}\nabla_{\dot{c}}X_1-\frac{1}{s^2}X_1.$$

因 $X_1=\dot{c}$，故得

$$\nabla_{\dot{c}}\nabla_{\dot{c}}\dot{c}+\frac{1}{s}\nabla_{\dot{c}}\dot{c}+\frac{1}{s^2}\dot{c}=0. \tag{1}$$

反之，考虑满足（1）的曲线 c。由弗雷内·塞雷公式

$$\nabla_{\dot{c}} X_1 = \kappa_1 X_2,\quad \nabla_{\dot{c}} X_2 = -\kappa_1 X_1 + \kappa_2 X_3$$

得

$$\nabla_{\dot{c}}\nabla_{\dot{c}} X_1 = \nabla_{\dot{c}}(\kappa_1 X_2) = \dot{\kappa}_1 X_2 + \kappa_1(-\kappa_1 X_1 + \kappa_2 X_3)$$

$$= \dot{\kappa}_1 X_2 - \kappa_1^2 X_1 + \kappa_1\kappa_2 X_3.$$

另外，从（1）得

$$\nabla_{\dot{c}}\nabla_{\dot{c}} X_1 = -\frac{1}{s}\nabla_{\dot{c}} X_1 - \frac{1}{s^2} X_1$$

$$= -\frac{1}{s}\kappa_1 X_2 - \frac{1}{s^2} X_1.$$

比较上列二式得

$$\dot{\kappa}_1 = -\frac{\kappa_1}{s},\quad \kappa_1^2 = \frac{1}{s^2},\quad \kappa_1\kappa_2 = 0.$$

因 $\kappa_1 \geqslant 0$，故得

$$\kappa_1 = \frac{1}{s},\quad \kappa_2 = 0.$$

例题 2. 在以弧长 s 为参数的曲线 c 上各点，弗雷内标形 X_1，…，X_k 是从

$$Y_1 = \dot{c},\quad Y_2 = \nabla_{\dot{c}}\dot{c},\quad \cdots,\quad Y_k = (\nabla_{\dot{c}})^{k-1}\dot{c}$$

经施密特正交化而得到的。

解. 我们来证明在各点 p，Y_r 是 X_1，…，X_r 的线性组合。当 $r=1$ 时，$Y_1 = \dot{c} = X_1$。假设当 r 时正确，即

$$Y_r = a_1 X_1 + \cdots + a_r X_r,$$

$$a_i = a_i(s),\quad i = 1,\cdots,r,$$

$$a_r > 0$$

成立。这时

$$Y_{r+1} = \nabla_{\dot{c}} Y_r = \dot{a}_1 X_1 + \cdots + \dot{a}_r X_r + a_1 \nabla_{\dot{c}} X_1 + \cdots + a_r \nabla_{\dot{c}} X_r.$$

将弗雷内·塞雷公式代入之，则变成

$$Y_{r+1}=b_1X_1+\cdots b_{r+1}X_{r+1},$$
$$b_{r+1}=a_r\kappa_{r+1}>0$$

的形状。

其次设 $Y_1,\cdots,Y_k$ 经施密特正交化得到了 $Z_1,\cdots,Z_k$，假设 $Z_1=X_1,\cdots,Z_r=X_r(r<k)$ 成立（当 $r=1$ 时 $Y_1=Z_1=X_1$）。在

$$Z_{r+1}=\frac{Y_{r+1}-\sum_{i=1}^{r}\langle Y_{r+1},X_i\rangle X_i}{\|Y_{r+1}-\sum_{i=1}^{r}\langle Y_{r+1},X_i\rangle X_i\|}$$

里，因 $\langle Y_{r+1},X_i\rangle=b_i$，故

$$\text{分子}=Y_{r+1}-\sum_{i=1}^{r}b_iX_i=b_{r+1}X_{r+1}.$$

然因 $b_{r+1}>0$，故分母 $=b_{r+1}$，即 $Z_{r+1}=X_{r+1}$。

习　题　五

1. 设 $X\in T_p(M)$，$\lambda(t)=tX$，则 t 为测地线 $c=E_p\circ\lambda$ 的仿射参数。

2. 设曲线 $\omega:[0,l]\to M^n$ 的长不比从 $\omega(0)$ 到 $\omega(l)$ 的任何曲线之长大。这时 ω 是测地线。

3. 从曲线或曲面外一点向它们引最短曲线（如果存在）是测地线而且垂直。

4. 以黎曼空间的任意点 q 为原点，而且 $\bar{g}_{\lambda\mu}(q)=\delta_{\lambda\mu}$ 的测地坐标系存在。

5. 同理，存在 $\bar{g}_{\lambda\mu}(q)=\delta_{\lambda\mu}$ 的法坐标系。

6. 在通过 q 的各测地线上，在 q 的两侧与 q 等距的点对应起来，这种对应称为关于 q 的**点对称**。现在假设关于 q 的点对称在 q 的邻域里是等距变换。这时 $(\nabla_\lambda R_{\mu\nu\omega}{}^{\kappa})_q=0$ 成立。

注意．一般地说，满足 $\nabla_\lambda R_{\mu\nu\omega}{}^{\kappa}=0$ 的黎曼空间称为**局部对称黎**

曼空间。

7. 在法坐标系的原点下式成立。

$$\frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \mu\nu} \right\}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{3}(R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa} + R_{\lambda\nu\mu}{}^{\kappa}).$$

8. 设通过法坐标系的原点 q，方向 $X=(\xi^{\lambda})\in T_q(M)$ 的测地线为

$$c: x^{\lambda} = \xi^{\lambda} s, \quad s \text{ 是弧长。}$$

设 $Z(s)=(\zeta^{\lambda}(s))$ 是将 $Y=(\eta^{\lambda})\in T_q(M)$ 沿曲线 c 平行移动而得向量，这时下式成立。

(i) $\quad \zeta^{\kappa}(s) = \eta^{\kappa} - \frac{1}{6}(R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa})_q \xi^{\lambda}\eta^{\mu}\xi^{\nu} + O(s^3).$

(ii) 再设 $\langle X, Y\rangle = 0$，令 $\|Z(s)\|_q^2 = g_{\lambda\mu}(q)\zeta^{\lambda}(s)\zeta^{\mu}(s)$ 则

$$\|Z(s)\|_q = \left(1 + \frac{s^2}{6}\rho(X, Y)\right)\|Y\| + O(s^3).$$

9. 设 c 为测地线，变分向量 Y 在两端点满足 $\langle Y, \dot{c}\rangle = 0$，则 c 的第一变分是 0。

10. 以开玲向量场为变分向量的测地线的第二变分是 0。

11. 固定两端点的测地线的第二变分

$$L''(0) = \int_{u_1}^{u_2} \{\|\nabla_{\dot{c}} Z\|^2 + R(\dot{c}, Z, \dot{c}, Z)\} du$$

可变为下列形状。

$$L''(0) = -\int_{u_1}^{u_2} \langle \nabla_{\dot{c}}\nabla_{\dot{c}} Z + \hat{R}(Z, \dot{c})\dot{c}, Z\rangle du,$$

式中 Z 为满足 $\langle Z, \dot{c}\rangle = 0$ 的变分向量。

12. 在测地线 c 的一点与 $\dot{c}$ 垂直的单位向量经平行移动而得的 c 上的向量场设为 N。又设变分向量 Y 在 c 上是 $Y = f(u)N$ 的形状，则对于固定两端点的变分，c 的第二变分由

$$L''(0)=\int_{u_1}^{u_2}\{\dot{f}^2-f^2\rho(\dot{c},N)\}du$$

$$=-\int_{u_1}^{u_2}f\{\ddot{f}+f\rho(\dot{c},N)\}du$$

而定。

13. 举例说明对球面 S^2 而言定理 21.4 的结论"测地线对于其上任意二点是相对最短"不成立。

14. 在所有的点与所有的方向上平均曲率 $>a^2$ 的黎曼空间里，长 $\geqslant\pi/a$ 的测地线不是其端点间的最短者。其中设 a 为常数。

注意。因半径 k 的球面的平均曲率为 $1/k^2$ ，故设 $1/k^2>a^2$，则 $\pi/a>k\pi$（半圆周）。

15. 在欧拉微分方程里，令

$$\mathfrak{F}(x,\dot{x})=(g_{\lambda\mu}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\mu)^{1/2},$$

试导出测地线的微分方程。

16. 关于测地线 c 上的雅可比场，下式成立。

(i) 设 $a\in\boldsymbol{R}$，则 $a\dot{c}$ 是雅可比场。

(ii) 如 X，Y 是雅可比场，则

$$\langle X,\nabla_{\dot{c}}Y\rangle-\langle\nabla_{\dot{c}}X,Y\rangle=\text{常数}.$$

(iii) 对于雅可比场 Y，

$$\langle\dot{c},\nabla_{\dot{c}}Y\rangle=a\in\boldsymbol{R}$$

$$\langle\dot{c},Y\rangle=at+b,\ b\in\boldsymbol{R}.$$

故设 Y 在 c 的不同二点为 0 时，则 Y 与 $\dot{c}$ 垂直。

17. 仿射开玲向量是任意测地线上的雅可比场。

18. 设 O_p 为 $T_p(M)$ 的包含 0 的开集，又设 E_p 在这里有定义。设 $c:[0,1]\to M^n$ 是 $c(0)=p,\dot{c}(0)=v\in O_p$ 的测地线，对于 $0\leqslant t\leqslant 1$，标准同构映射（参照习题二第 15 题）为

$$\mathfrak{J}_{tv}:T_p(M)\to T_{tv}(T_p(M))$$

这时对于任意的 $w\in O_p$，

$$Y(t)=(E_p)_*\mathfrak{J}_{tv}(tw) \qquad (1)$$

是满足

$$Y(0)=0,\ (\nabla_{\dot c}Y)(0)=w$$

的雅可比场。

反之，在测地线 c 上的雅可比场中满足 $Y(0)=0$ 者，总是由（1）给定。

19. （**高斯引理**）设 O_p 与前题一样。关于 $T_p(M)$ 的曲线

$$\lambda(t)=tv,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ v\in O_p$$

设

$$A=\dot\lambda(1)\in T_v(T_p(M))$$

则对于任意的 $B\in T_v(T_p(M))$

$$\langle (E_p)_*(A),(E_p)_*(B)\rangle=\langle A,B\rangle$$

成立。式中左边的 $\langle,\rangle$ 表示 M^n 里的内积，将微分流形 $T_p(M)$ 看做度量张量为 $g_{\lambda\mu}(p)$ 的欧氏空间时，右边的 $\langle,\rangle$ 表示 $T_p(M)$ 里的内积。

20. 设 O_p，λ 与前题相同。又设 $\mu:[0,1]\to O_p$ 是满足

$$\mu(0)=\lambda(0)=0,\ \mu(1)=\lambda(1)=v\in O_p$$

的 $T_p(M)$ 的曲线。再用 $L(c),L(\gamma)$ 表示 M^n 的曲线 $c=E_p\circ\lambda$（测地线），$\gamma=E_p\circ\mu$ 的长，则

(i) $L(\gamma)\geqslant L(c)$。

(ii) 在所有的点 $\mu(t)$，E_p 正则，而且如 c 与 γ 的象集不同时，则 $L(\gamma)>L(c)$。

21. 第一法线向量 X_2 平行的曲线是测地线。

22. 关于等距变换群 $\{\phi_t\}$ 的轨道 c，$\nabla_{\dot c}\dot c$ 是梯度。

23. 关于欧氏空间 E^n 的曲线 c，试求 $c(s)+f(s)X_2$ 为定点的条件。其中 $c(s)$ 为点 $c(s)$ 的位置向量。

24. 满足

$$\kappa_{i-1}X_{i-1}+\nabla_{\dot c}X_i=\kappa_i X_{i+1}.$$
$$\kappa_i>0,\qquad i=1,\cdots,k-1$$

的 $X_1,\cdots,X_k$ 为标准正交系时，由

$$\kappa_{k-1}X_{k-1}+\nabla_{\dot{c}}X_k=\kappa_k X_{k+1}, \qquad (\kappa_k>0)$$

定义单位向量 X_{k+1}，则 $X_1,\cdots,X_{k+1}$ 作成标准正交系。

25. 对于 $0<i<k$ 的所有 i，设曲线 c 的 $\kappa_i\neq 0$。这时关于弗雷内标形 X_i，

$$X_i=\sum_{j=1}^{i}A_{ij}(\nabla_{\dot{c}})^j\dot{c}, \quad 1\leqslant i\leqslant k$$

成立。式中 A_{ij} 为 c 上的数量函数，特别是

$$A_{ii}=\frac{1}{\kappa_1\cdots\kappa_{i-1}}, \quad A_{11}=1.$$

第六章 子空间论

§23. 子空间的张量场与共变导数

例题 1. 在 m 维曲面上，由

$$M_{bc}{}^{\lambda}=H_{bc}{}^{\lambda}-\frac{1}{m}H^{\lambda}g_{bc}$$

定义的张量以及

$$L_{ABc}=(\nabla_c N_{A\lambda})N_B{}^{\lambda}$$

在共形对应下不变。式中设 $N_A{}^{\lambda}(A=m+1,\cdots,n)$ 为单位法向量，$H^{\lambda}=g^{ab}H_{ab}{}^{\lambda}$。

解. 考虑共形对应 $\overset{*}{g}_{\lambda\mu}=e^{2\rho}g_{\lambda\mu}$，从$g$，$\overset{*}{g}$ 诱导在曲面上的度量张量（略去上面一横）以 g_{bc}，$\overset{*}{g}_{bc}$ 记之。因在共形对应下曲面的方程 $x^{\lambda}=x^{\lambda}(u^a)$ 并无变化，故 $B_a{}^{\lambda}=\partial x^{\lambda}/\partial u^a$ 首先是共形不变量。从而

$$\overset{*}{g}_{bc}=\overset{*}{g}_{\mu\nu}B_b{}^{\mu}B_c{}^{\nu}=e^{2\rho}g_{\mu\nu}B_b{}^{\mu}B_c{}^{\nu}=e^{2\rho}g_{bc}$$

由此得

$$\overset{*}{g}{}^{ca}=e^{-2\rho}g^{ca}$$

在曲面上 $\rho=\rho(x)$ 是 u^a 的函数又可写做 $\rho=\rho(x(u))$，故

$$\rho_a=\frac{\partial\rho}{\partial u^a}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^a}\ \frac{\partial\rho}{\partial x^{\lambda}}=B_a{}^{\lambda}\rho_{\lambda}.$$

与 $B^a{}_{\mu}$ 作积和得

$$\rho_a B^a{}_{\mu}=(\delta_{\mu}{}^{\lambda}-\sum_A N_{A\mu}N_A{}^{\lambda})\rho_{\lambda}.$$

故令

$$\rho_A=N_A{}^{\lambda}\rho_{\lambda}$$

则得

$$\rho^\lambda = B_e{}^\lambda \rho^e + \sum \rho_A N_A{}^\lambda \tag{1}$$

以下计算$\overset{*}{H}_{bc}{}^\lambda$.

$$\overset{*}{H}_{bc}{}^\lambda = \overset{*}{\nabla}_b B_c{}^\lambda = \frac{\partial B_c{}^\lambda}{\partial u^b} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}^* B_b{}^\mu B_c{}^\nu - \left\{ {a \atop bc} \right\}^* B_a{}^\lambda$$

$$= \frac{\partial B_c{}^\lambda}{\partial u^b} + \left(\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} + \rho_\mu \delta_\nu{}^\lambda + \rho_\nu \delta_\mu{}^\lambda - \rho^\lambda g_{\mu\nu} \right) B_b{}^\mu B_c{}^\nu$$

$$- \left(\left\{ {a \atop bc} \right\} + \rho_b \delta_c{}^a + \rho_c \delta_b{}^a - \rho^a g_{bc} \right) B_a{}^\lambda$$

$$= \nabla_b B_c{}^\lambda - (\rho^\lambda - \rho^e B_e{}^\lambda) g_{bc}.$$

将（1）代入之可得下式

$$\overset{*}{H}_{bc}{}^\lambda = H_{bc}{}^\lambda - (\sum \rho_A N_A{}^\lambda) g_{bc}. \tag{2}$$

（2）与 $\overset{*}{g}{}^{bc} = e^{-2\rho} g^{bc}$ 作积和得

$$\overset{*}{H}{}^\lambda = e^{-2\rho} \ (H^\lambda - m \sum \rho_A N_A{}^\lambda),$$

$$\sum \rho_A N_A{}^\lambda = \frac{1}{m} (-e^{2\rho} \overset{*}{H}{}^\lambda + H^\lambda)$$

代入（2）并整理之得

$$\overset{*}{H}_{bc}{}^\lambda - \frac{1}{m} \overset{*}{H}{}^\lambda e^{2\rho} g_{bc} = H_{bc}{}^\lambda - \frac{1}{m} H^\lambda g_{bc},$$

即得

$$\overset{*}{M}_{bc}{}^\lambda = M_{bc}{}^\lambda.$$

再来计算$\overset{*}{L}_{ABf}$。因 $\overset{*}{N}_A{}^\lambda$ 关于$\overset{*}{g}_{\lambda\mu}$是单位向量，故有关系：

$$\overset{*}{N}_A{}^\lambda = e^{-\rho} N_A{}^\lambda, \qquad \overset{*}{N}_{A\lambda} = e^\rho N_{A\lambda}$$

因此

$$\begin{aligned} \overset{*}{L}_{ABf} &= (\overset{*}{\nabla}_f \overset{*}{N}_{A\lambda}) \overset{*}{N}_B{}^\lambda = \overset{*}{\nabla}_f (e^\rho N_{A\lambda}) \, e^{-\rho} N_B{}^\lambda \\ &= e^\rho (\rho_f N_{A\lambda} + \overset{*}{\nabla}_f N_{A\lambda}) e^{-\rho} N_B{}^\lambda \\ &= (\rho_f N_{A\lambda} + \overset{*}{\nabla}_f N_{A\lambda}) N_B{}^\lambda. \end{aligned}$$

然而

$$\overset{*}{\nabla}_f N_{A\lambda} = \frac{\partial N_{A\lambda}}{\partial u^f} - \left\{ {\varepsilon \atop \mu\lambda} \right\}^* N_{A\varepsilon} B_f{}^\mu$$

$$= \nabla_f N_{A\lambda} - (\rho_\mu \delta_\lambda{}^\varepsilon + \rho_\lambda \delta_\mu{}^\varepsilon - \rho^\varepsilon g_{\lambda\mu}) N_{A\varepsilon} B_f{}^\mu$$

$$= \nabla_f N_{A\lambda} - \rho_f N_{A\lambda} + \rho_A B_{f\lambda}.$$

由此得

$$\overset{*}{L}_{ABf} = (\nabla_f N_{A\lambda} + \rho_A B_{f\lambda}) N_B{}^\lambda = (\nabla_f N_{A\lambda}) N_B{}^\lambda = L_{ABf}.$$

注意. 可见在共形变换下脐点变为脐点，全脐曲面变为全脐曲面。

§24. 全测地曲面、全脐曲面

例题 1. 将切于全测地曲面的 $\overline{M}^m$-向量，沿 $\overline{M}^m$ 上的曲线 $\overline{c}$ 在 M^n 的平行性下平行移动之所得向量仍然切于$\overline{M}^m$，而且在$\overline{M}^m$的平行性下也是平行。

解. 设将$X_p = \overline{\xi}^a(p)\dfrac{\partial}{\partial u^a} = \xi^\lambda(p)\dfrac{\partial}{\partial u^\lambda}$在$M^n$的平行性下平行移动之得到$\overline{c}$上的向量场$X = \xi^\lambda(t)\dfrac{\partial}{\partial x^\lambda}$. $\xi^\lambda(t)$可写做

$$\xi^\lambda(t) = B_a{}^\lambda \overline{\xi}^a(t) + \sum f_A(t) N_A{}^\lambda$$

的形状。因为平行，所以

$$0 = \frac{\delta}{\delta t}\xi^\lambda = \frac{\overline{\delta}}{\delta t}\xi^\lambda = \frac{du^b}{dt}\nabla_b B_a{}^\lambda \overline{\xi}^a + B_a{}^\lambda \frac{\overline{\delta}}{\delta t}\overline{\xi}^a$$

$$+ \sum\left(\frac{df_A}{dt} N_A{}^\lambda + f_A \frac{du^b}{dt}\nabla_b N_A{}^\lambda\right)$$

将$\nabla_b B_a{}^\lambda = H_{ba}{}^\lambda$ 与温加顿公式代入之得

$$\frac{du^b}{dt} H_{ba}{}^\lambda \overline{\xi}^a + B_a{}^\lambda \frac{\overline{\delta}}{\delta t}\overline{\xi}^a$$

$$+\sum_A\left\{\frac{df_A}{dt}N_A{}^\lambda+f_A\frac{du^b}{dt}(-H_{Ab}{}^cB_c{}^\lambda+\sum_B L_{ABb}N_B{}^\lambda)\right\}=0$$

然因 $H_{ba}{}^\lambda=0$，$H_{Ab}{}^c=0$，故

$$B_a{}^\lambda\frac{\bar\delta}{\delta t}\bar\xi^a+\sum_B\left(\frac{df_B}{dt}+\sum_A f_A\frac{du^b}{dt}L_{ABb}\right)N_B{}^\lambda=0$$

因为 $B_a{}^\lambda$，$N_A{}^\lambda$ 互相垂直，所以各系数为 0 。于是得

$$\frac{\bar\delta}{\delta t}\bar\xi^a=0\quad, \tag{1}$$

$$\frac{df_B}{dt}+\frac{du^b}{dt}\sum f_AL_{ABb}=0, \tag{2}$$

$f_B(t)\equiv0$ 满足 (2)。然因在点 p 处 $f_B=0$，故由微分方程的解的唯一性知 $f_B(t)\equiv0$。因此得

$$\xi^\lambda(t)=B_a{}^\lambda\overline{\xi^a}$$

可见 X 恒切于 $\overline{M}^m$。再由 (1) 知 X 沿 $\bar c$ 在 $\overline{M}^m$ 的平行性下平行。

例题 2. 对于断面曲率恒为正的 n 维黎曼空间 M^n 中的两个全测地曲面 $M_1{}^r$，$M_2{}^s$，假设存在曲线 c 给出二者间的最短距离.这时，如果 $r+s>n$，则 $M_1{}^r$ 与 $M_2{}^s$ 有交点（因此 c 的长为 0）.

解. 由习题五第 3 题知，c 是与 $M_1{}^r$，$M_2{}^s$ 双方都垂直的测地线. 设 $c:[0,l]\to M^n$，$c(0)=p\in M_1{}^r$，$c(l)=q\in M_2{}^s$，则在给定的假设下，从 $l\neq0$ 导致矛盾.

将 $T_p(M_1)$ 沿曲线 c 平行移动之可得 q 处的向量空间设为 V，则

$$\dim V=\dim T_p(M_1)=r,\qquad(\dim=维数).$$

根据假设

$$\dim V+\dim T_q(M_2)=r+s>n=\dim T_q(M)$$

又因 $V\subset T_q(M)$，$T_q(M_2)\subset T_q(M)$，故

$$V\cap T_q(M_2)\neq\varnothing.$$

因此存在单位向量 Y_q 满足

$$Y_q\in V\cap T_q(M_2)$$

将 Y_q 沿 c^{-1} 平行移动之而得的 c 上的向量场设为 $Y=Y(t)$，则

$$Y(0)\in T_p(M_1),\ Y(l)=Y_q\in T_q(M_2),\ \|Y\|=1,\ \nabla_{\dot c}Y=0$$

成立。

现在考虑变分向量 $Y(t,\varepsilon)$ 在 c 上为 Y 的 c 的变分 α:

$$\alpha(t,\varepsilon)=E_{c(t)}(\varepsilon Y(t))$$

式中的 $E_{c(t)}$ 是在点 $c(t)$ 处的幂映射。由 $(21.24)_g$ 可见，测地线 c 的第二变分是

$$L''(0)=\langle \dot c,\nabla_Y Y\rangle\Big|_0^l+\int_0^l\{\|\nabla_{\dot c}Y\|^2+R(\dot c,Y,\dot c,Y)\}dt.$$

故

$$L''(0)=\langle \dot c,\nabla_Y Y\rangle\Big|_0^l-\int_0^l\rho(\dot c,Y)dt.$$

以下证明 $(\nabla_Y Y)_0=0$. 在 p 考虑测地线 c_1:

$$c_1(\varepsilon)=E_p(\varepsilon Y(0))$$

因 $M_1{}'$ 是全测地曲面而且 $Y(0)$ 与之在 p 相切，故 $c_1(\varepsilon)$ 在 $M_1{}'$ 上。又因在 $t=0$ 处的变分向量 $Y(0,\varepsilon)$ 是 c_1 的切线，故切于 $M_1{}'$。设在 p 的邻域里将 $M_1{}'$ 表示为 $x^\lambda=x^\lambda(u^a)$，c_1 表示为 $u^a=u^a(\varepsilon)$，$Y(0,\varepsilon)$ 的分量为 $\eta^\lambda=B_a{}^\lambda\frac{du^a}{d\varepsilon}$，则 $\nabla_Y Y$ 的分量变为

$$\frac{\delta}{\delta\varepsilon}\eta^\lambda=\frac{\delta}{\delta\varepsilon}\left(B_a{}^\lambda\frac{du^a}{d\varepsilon}\right)$$

$$=\frac{du^b}{d\varepsilon}\nabla_b B_a{}^\lambda\frac{du^a}{d\varepsilon}+B_a{}^\lambda\frac{\delta}{\delta\varepsilon}\frac{du^a}{d\varepsilon}$$

$$=H_{ba}{}^\lambda\frac{du^b}{d\varepsilon}\frac{du^a}{d\varepsilon}=0$$

特别是在 $\varepsilon=0$ 处 $(\nabla_Y Y)(0)=0$，同理可得 $(\nabla_Y Y)(l)=0$，故 c 的第二变分变为

$$L''(0)=-\int_0^l\rho(\dot c,Y)dt<0.$$

故 c 之长给出变分曲线之长的极大值，因此在变分曲线中存在比 c 短的曲线 c'。然因 c' 的两端点分别在 $M_1{}^r, M_2{}^s$ 的曲线 c_1, c_2：

$$c_1(\varepsilon) = E_p(\varepsilon Y(0)), \quad c_2(\varepsilon) = E_q(\varepsilon Y(l))$$

上,故与 c 是 $M_1{}^r$ 与 $M_2{}^s$ 之间的最短曲线矛盾.这种矛盾是由 $l \neq 0$ 引起的。因此 $l = 0$。即两曲面有交点.

§25. 高斯·柯达齐·利齐方程

例题 1. m 维 ($2 \leqq m < n$) 极小曲面 $\overline{M}^m$ 在 p 处的利齐平均曲率不超过在 p 处与 $\overline{M}^m$ 相切的 m 维全测地曲面 N^m 的利齐平均曲率。

注意. 满足 $H^\lambda = \overline{g}^{ba} H_{ba}{}^\lambda = 0$ 的曲面称为**极小曲面.**

解. 因 $\overline{M}^m$, N^m 在 p 相切,故可设在点 p, $B_a{}^\lambda$ 是一致的。因此度量张量、单位法向量、$B^a{}_\lambda$ 的值也在 p 一致。

在 $\overline{M}^m$ 的高斯方程:

$$\overline{R}_{abc}{}^f = R_{\lambda\mu\nu}{}^\omega B_a{}^\lambda B_b{}^\mu R_c{}^\nu B^f{}_\omega + H_a{}^f{}_\varepsilon H_{bc}{}^\varepsilon - H_b{}^f{}_\varepsilon H_{ac}{}^\varepsilon \qquad (1)$$

里，a 与 f 缩短之得

$$\overline{R}_{bc} = (R_{\mu\nu} - \sum_A R_{\alpha\mu\nu\beta} N_A{}^\alpha N_A{}^\beta) B_b{}^\mu B_c{}^\nu - H_b{}^a{}_\varepsilon H_{ac}{}^\varepsilon. \qquad (2)$$

现在设 X 是与 $\overline{M}^m$ 相切的向量，其分量为 $\xi^\lambda = B_a{}^\lambda \eta^a$。(2) 的两边乘以 $\eta^b\eta^c$ 并求和得

$$\overline{R}\mathrm{ic}(X) = \mathrm{Ric}(X) - \sum \rho(X, N_A) - H_b{}^a{}_\varepsilon \eta^b H_{ca}{}^\varepsilon \eta^c \qquad (3)$$

另一方面，关于 N^m，代替 (1)

$$R'_{abc}{}^f = R_{\lambda\mu\nu}{}^\omega B_a{}^\lambda B_b{}^\mu B_c{}^\nu B^f{}_\omega$$

成立。式子的左边是 N^m 的曲率张量. 由此可得

$$\mathrm{Ric}'(X) = \mathrm{Ric}\,(X) - \sum_A \rho(X, N_A)$$

以代替 (3)。故

$$\overline{R}\mathrm{ic}(X) - \mathrm{Ric}'(X) = -H_b{}^a{}_\varepsilon \eta^b H_{ca}{}^\varepsilon \eta^c.$$

在右边里令 $H_{ca}{}^{\varepsilon}\eta^a = H_c{}^{\varepsilon}$，则

$$-H^a{}_{\varepsilon}H_a{}^{\varepsilon} = -g^{ab}g^{\lambda\mu}H_{a\lambda}H_{b\mu} \leqslant 0$$

故得

$$\overline{\mathrm{R}}\mathrm{ic}(X) \leqslant \mathrm{Ric}'(X)$$

例题 2. 如果欧氏空间 $E^n(n>3)$ 里的爱因斯坦超曲面的数量曲率为正，则此超曲面是常曲率空间。

解. 因超曲面 $\overline{M}^{n-1}$ 是爱因斯坦空间，故

$$\overline{R}_{bc} = \frac{\overline{R}}{n-1} g_{bc} \tag{1}$$

成立。式中的数量曲率 $\overline{R}$ 是正常数。

因为第二基本张量所作矩阵 (H_{ab}) 是对称矩阵，故在一点 p 可取其特征向量 $X_{(i)} = \eta_i{}^a\partial/u^a(i=1,\cdots,n-1)$ 作成 $T_p(\overline{M})$ 的标准正交基。因 $X_{(i)}$ 是特征向量，故

$$H_{ab}\eta_i{}^b = c_i\overline{g}_{ab}\eta_i{}^b \tag{2}$$

成立，特征值 c_i 是实数。

另外，向高斯方程

$$\overline{R}_{abcd} = H_{ad}H_{bc} - H_{ac}H_{bd}$$

乘以 $\overline{g}^{ad}$ 并求和得

$$\overline{R}_{bc} = HH_{bc} - \overline{g}^{ad}H_{ac}H_{bd} \tag{3}$$

式中

$$H = \overline{g}^{ad}H_{ad}$$

其次作 (3) 与 $\eta_i{}^b\eta_i{}^c$ 的积和，则由(1)，(2)得

$$\frac{\overline{R}}{n-1} = Hc_i - c_i{}^2, \quad i=1, \ \cdots, \ n-1,$$

可见特征值 c_i 是二次方程

$$x^2 - Hx + \frac{\overline{R}}{n-1} = 0 \tag{4}$$

的根。

(i) c_i 不全相等的情况。设 (4) 的二根为 α，β，又设

$$c_1 = \cdots = c_r = \alpha, \qquad c_{r+1} = \cdots = c_{r+s} = \beta$$
$$r + s = n - 1.$$

从(4)的根与系数的关系知

$$\alpha + \beta = H, \tag{5}$$
$$\alpha\beta = \overline{R}/(n-1) > 0. \tag{6}$$

另外向(2)乘以 $\eta_c{}^i$ 并关于 i 求和

$$H_{ac} = \sum_i c_i \overline{g}_{ab} \eta_i{}^b \eta_c{}^i$$

再与 $\overline{g}^{ac}$ 作积和得

$$H = \sum_i c_i \eta_i{}^c \eta_c{}^i = \sum_i c_i = r\alpha + s\beta$$

与(5)比较之可得

$$(r-1)\alpha + (s-1)\beta = 0 \tag{7}$$

然由(6)知 $\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$，故如 $r=1$ 或 $s=1$，从(7)得到矛盾。从而 $r>1, s>1$。然而在这种情况下也产生矛盾。原因是，由(6)可见，α, β 符号相同，然由(7)可见符号又不同。故不能是(i)的情况。

(ii) $c_1 = \cdots = c_{n-1} (= c)$ 的情况。这时从(2)得

$$H_{ab} \eta_i{}^b = c \overline{g}_{ab} \eta_i{}^b.$$

设 $(\eta_i{}^b)$ 的逆矩阵为 $(\eta_b{}^i)$，向上式乘以 $\eta_c{}^i$ 并关于 i 求和得

$$H_{ac} = c \overline{g}_{ac}.$$

故 p 为脐点，从而 $\overline{M}^{n-1}$ 为全脐曲面。由定理 25.2 知，它是常曲率空间。

习 题 六

1. 与 $\overline{M}^m$ 相切的向量之长及其间夹角不论用 M^n 的度量还是用诱导度量计算都一样。

2. 对于曲面 $\overline{M}^m$，设矩阵 $(B_a{}^\lambda, N_A{}^\lambda)$ 的逆矩阵为 $(B^a{}_\lambda, N_{A\lambda})$，则下式成立。

(i) $\overline{g}_{ab} B^a{}_\mu = g_{\lambda\mu} B_b{}^\lambda$,

(ii) $B^a{}_\lambda = \overline{g}^{ab} g_{\lambda\mu} B_b{}^\mu$, $B_b{}^\mu = \overline{g}_{ab} g^{\lambda\mu} B^a{}_\lambda$,

(iii) $\overline{g}^{ab} = B^a{}_\lambda B^b{}_\mu g^{\lambda\mu}$,

(iv) $N_{A\lambda} = g_{\lambda\mu} N_A{}^\mu$, $N_A{}^\lambda = g^{\lambda\mu} N_{A\mu}$.

3. 试证下式。

$$\left\{ {a \atop bc} \right\} = B^a{}_\lambda \left(\frac{\partial B_c{}^\lambda}{\partial u^b} + B_b{}^\mu B_c{}^\nu \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \right)$$

4. 试证下式。

$$\overline{V}_b(T_a{}^\lambda \xi^a \eta_\lambda) = (\overline{V}_b T_a{}^\lambda) \xi^a \eta_\lambda + T_a{}^\lambda (\overline{V}_b \xi^a) \eta_\lambda + T_a{}^\lambda \xi^a \overline{V}_b \eta_\lambda.$$

5. 当 X, $Y \in T_p(\overline{M})$ 在曲面 $\overline{M}^m$ 的点 p 满足

$$H_{ab}{}^\lambda H_{cd\lambda} \xi^a \overline{\eta}^b \xi^c \overline{\eta}^d = 0$$

时，称为互为**共轭方向**。关于超曲面，X 与 Y 互为共轭方向的条件是

$$H_{ab} \xi^a \overline{\eta}^b = 0.$$

6. 当 $X = (\xi^a) \in T_p(\overline{M})$ 是自共轭方向时，称为**渐近方向**。X 为渐近方向的条件是 $H_{ab}{}^\lambda \xi^a \xi^b = 0$。

7. 对于球面 $S^n(k): (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = k^2$，在北半球 U^+_{n+1} 令 $u^a = x^a$ $(a = 1, \cdots, n)$，则下式成立。

$$B_a{}^\lambda = \begin{cases} \delta_a{}^b, & \text{当 } \lambda = b \text{ 时}, \\ -\dfrac{x^a}{x^{n+1}}, & \text{当 } \lambda = n+1 \text{ 时}, \end{cases}$$

$$N^\lambda = \frac{1}{k} x^\lambda$$

$$H_{bc} = -\frac{1}{k} \overline{g}_{bc} = -\frac{1}{k} \left(\delta_{bc} + \frac{x^b x^c}{(x^{n+1})^2} \right).$$

注意. $N^\lambda = -(1/k) x^\lambda$ 亦可。这时 $H_{bc} = (1/k) \overline{g}_{bc}$

8. 从 E^{n+1} 的向量场 $X = (0, \cdots, 0, 1)$ 诱导在 $S^n(k)$ 上的向量场 $Y = (\eta^a)$ 的分量在 U^+_{n+1} 上由下式而定。

$$\eta^a = -\frac{x^{n+1} x^a}{k^2}$$

注意．根据定理 24.7 知道，Y 是 $S^n(k)$ 上的共形开玲向量，而且本质与习题四第 37 题给定者一致。

9．如$\overline{M}^m$ 上的曲线的切向量总是渐近方向时，则此曲线称为**渐近曲线**。一曲线为渐近曲线的条件是其绝对曲率向量与$\overline{M}^m$ 相切。

10．曲面$\overline{M}^m$ 的曲线为 M^n 的测地线的条件是此曲线为$\overline{M}^m$ 的测地线，同时又是渐近曲线。

11．在曲面$\overline{M}^2$ 的点 p 处，通过 p 的三个不同方向的测地线如包含于$\overline{M}^2$ 内，则 p 为$\overline{M}^2$ 的测地点。

12．E^n 的全测地超曲面是 $n-1$ 维欧氏空间的开子空间．

13．如 M^n 的线素是

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b + (dx^n)^2$$

的形状，则 $x^n=$一定的超曲面是全测地的。式中设 $a,b=1,\cdots,n-1$，又设 g_{ab} 只是 $x^1,\cdots,x^{n-1}$ 的函数。

14．如 M^n 的线素是

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b + g_{ij}dx^i dx^j$$

的形状时，则 $x^i=$一定的 r 维曲面是全测地的。式中设

$$a,b=1,\cdots,r;\quad i,j=r+1,\cdots,r+s(=n)$$

又设 g_{ab} 与 g_{ij} 分别是 $x^1,\cdots.x^r;x^{r+1},\cdots,x^n$ 的函数。

15 如 M^n 的线素是

$$ds^2 = (x^n)^2 \overset{*}{g}_{ab}dx^a dx^b + (dx^n)^2$$

则 $x^n=$一定($\neq 0$) 的超曲面是全脐曲面。式中设 $\overset{*}{g}_{ab}$只是 $x^1,\cdots,x^{n-1}$ 的函数。

16．E^n 的超曲面 $\overline{M}^{n-1}$ 的点p为脐点的条件是存在实数k使得在p

$$\frac{\partial N^\lambda}{\partial u^a} = -kB_a{}^\lambda \tag{1}$$

成立。

注意．(1) 与脐点的条件 $H_{ba}=k\overline{g}_{ba}$ 等价。运用 (1) 可不计算 $\overline{g}_{ba}$，$\overline{\left\{\begin{matrix}a\\bc\end{matrix}\right\}}$

17. 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,(a>b>c>0)$ 的脐点是

$$x=\pm\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},\ y=0,\ z=\pm\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

按照符号的组合，脐点有四个。

18 设 $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ 满足柯西·黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

这时，在 E^4 里由

$$x^1=x,\ x^2=y,\ x^3=u(x,y),\ x^4=v(x,y)$$

定义的二维曲面是极小曲面。

19. 关于超曲面，下式成立。

$$R_{\lambda\mu}B_a{}^\lambda N^\mu=\overline{\nabla}_aH-\overline{\nabla}_bH_a{}^b.$$

20. n（>2）维爱因斯坦空间的全脐超曲面是固有的。

21. 三维常曲率空间的全脐超曲面也是常曲率空间。

22. 数量曲率为负的常曲率空间不能是数量曲率为 0 或正的常曲率空间的全脐曲面。

23. 如仿射开玲向量与全测地曲面相切时，则它也是曲面的仿射开玲向量。

24. 在 n（>2）维常曲率空间里，

$$\nabla_\mu u_\nu=kg_{\mu\nu}+v_\mu v_\nu,\qquad k=R/n(n-1)$$

是完全可积的（参照习题三第 40 题）。运用这个性质试证在常曲率空间的各点的邻域里存在固有全脐超曲面以在各点任意给定的方向为其法线方向。

25. 对于 E^n（$n>4$）的超曲面，如其第二基本张量 H_{ab} 正则，则柯达齐方程

$$\overline{\nabla}_bH_{ca}-\overline{\nabla}_cH_{ba}=0\tag{1}$$

可从高斯方程

$$\overline{R}_{bcde}=H_{be}H_{cd}-H_{ce}H_{bd} \tag{2}$$

导出。

26. 设 $E^n(n>2)$ 的超曲面$\overline{M}^{n-1}$ 的第二基本张量 正则。这时，如由

$$g'_{ab}=\overline{g}_{ef}H_a{}^eH_b{}^f=H_{af}H_b{}^f$$

在$\overline{M}^{n-1}$ 上定义新黎曼度量 g'，则$\{\overline{M}^{n-1}, g'\}$ 为常曲率空间，而且

$$R'_{abef}=g'_{af}g'_{be}-g'_{bf}g'_{ae}$$

成立。

第七章 积 分 公 式

§26. 格 林 定 理

例题 1．在紧致、可定向的黎曼空间里，对于任意的函数 f

$$\int_M f\Delta f d\sigma = -\int_M \|\nabla f\|^2 d\sigma \leqslant 0 \qquad (1)$$

故

$$\int_M f\Delta f d\sigma = 0 \qquad (2)$$

的充要条件是 f 为常数。

解．因

$$\nabla_\lambda(f^2) = 2f\nabla_\lambda f,$$

$$\Delta(f^2) = \nabla^\lambda\nabla_\lambda(f^2) = 2(f\nabla^\lambda\nabla_\lambda f + \nabla^\lambda f\nabla_\lambda f)$$

故积分之得

$$\int_M (f\nabla^\lambda\nabla_\lambda f + \nabla_\lambda f\nabla^\lambda f)d\sigma = 0.$$

因为 $\nabla^\lambda\nabla_\lambda f = \Delta f$，$\nabla_\lambda f\nabla^\lambda f = \|\nabla f\|^2$，所以得（1）。如果 f 为常数，那么显然(2)成立。反之，设(2)成立，则由（1）知

$$\int_M \|\nabla f\|^2 d\sigma = 0.$$

然因 $\|\nabla f\|^2 \geqslant 0$，故总是 $\|\nabla f\|^2 = 0$。因此 $\nabla_\lambda f = 0$，可见 f 为常数。

例题 2．在紧致黎曼空间里，如果总是

$$\Delta f = \nabla^a\nabla_a f \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

那末 f 是常数。

解．根据下述注意知道，假设可定向也行．这时由于格林定理得 $\int_M \Delta f d\sigma = 0$．故 Δf 必然恒为 0。

$$\therefore \int_M f\Delta f d\sigma = 0$$

再由前题可见 f = 常数。

注意。人们知道，对于（连通的）不可定向的微分流形 M^n 存在具有下列二性质的（连通）可定向微分流形 $\widetilde{M}^n$。

（i） 存在在上映射 π: $\widetilde{M}^n \to M^n$,对于任意的 $p \in M^n$，$\pi^{-1}(p)$ 由 $\widetilde{M}^n$ 的两点而成。

（ii） 对于任意的 $p \in M^n$，存在其连通邻域 U，π^{-1}(U) 由二连通分量 $\widetilde{U}_1$，$\widetilde{U}_2$ 而成，π 是从U_1 也是从 U_2 到 U 上的微分同胚映射。

$\widetilde{M}^n$称为 M^n的**二重复盖流形**。特别当 M^n 是紧致时，则$\widetilde{M}^n$ 也是紧致。例如球面 S^2 是射影空间 P^2 的二重复盖流形。

设 $\{M^n;g\}$ 为黎曼空间，在 π 下将 g 诱导在 $\widetilde{M}^n$ 上而得黎曼度量设为 $\widetilde{g}$，则 $\{M^n,g\}$ 与 $\{\widetilde{M}^n,\widetilde{g}\}$ 是局部等距同胚。故只限于狭小部分，则M^n，$\widetilde{M}^n$的微分几何完全一致。

再者，在例题 2 里M^n不是可定向的情况下，在$\widetilde{M}^n$上考虑 $\widetilde{f} = \pi^* f$。对于满足条件(ii)的 U，$\widetilde{U}_1$,$\widetilde{U}_2$在 U，$\widetilde{U}_1$(以及 $\widetilde{U}_2$) 里引进坐标使得在π下对应的点具有相同坐标，设 $p_1 \in \widetilde{U}_1$，$\pi(p_1) = p$，则

$$\widetilde{g}_{\lambda\mu}(p_1) = g_{\lambda\mu}(p), \quad \widetilde{f}(p_1) = f(p)$$

故在$\widetilde{U}_1$里$\Delta\widetilde{f} \geqslant 0(\leqslant 0)$也成立。从而在$\widetilde{M}^n$ 上总是 $\Delta\widetilde{f} \geqslant 0(\leqslant 0)$，因此$\widetilde{f}$ = 常数，$\therefore f$ = 常数。

同理在 M^n上给定张量场时，由 π 诱导在$\widetilde{M}^n$上的张量场局部地与 M^n 的有完全相同的性质。这样考虑之，使用格林定理可证明的定理多数在不假设可定向下也可得到。在以下的问题里不假设可定向的就是根据这种理由。

§27. 格林定理的应用

例题 1. 求共变导数在张量空间之间是算子 ∇: $T^r(M) \to T^{r+1}(M)$。试求此算子的对偶算子。

解。设 T，S分别为 r，$r+1$ 阶的任意张量场，我们来求

$$(\nabla T, S) = (T, B(S))$$

成立的算子B： $S \to B(S)$

$$(r+1)!(\nabla T, S) = \int_M (\nabla_\alpha T_{\lambda_1 \cdots \lambda_r}) S^{\alpha\lambda_1 \cdots \lambda_r} d\sigma$$

$$= \int_M \{\nabla_\alpha (T_{\lambda_1 \cdots \lambda_r} S^{\alpha\lambda_1 \cdots \lambda_r}) - T_{\lambda_1 \cdots \lambda_r} \nabla_\alpha S^{\alpha\lambda_1 \cdots \lambda_r}\} d\sigma$$

$$= -\int_M T_{\lambda_1 \cdots \lambda_r} \nabla_\alpha S^{\alpha\lambda_1 \cdots \lambda_r} d\sigma.$$

故得

$$(\nabla T, S) = \frac{1}{r!} \int_M T_{\lambda_1 \cdots \lambda_r} \left(-\frac{1}{r+1} \nabla_\alpha S^{\alpha\lambda_1 \cdots \lambda_r}\right) d\sigma$$

如令

$$B(S) = -\frac{1}{r+1} \nabla^\alpha S_{\alpha\lambda_1 \cdots \lambda_r}$$

则 B 为 ∇ 的对偶算子。

注意。对于 r 阶张量T，S，

$$\langle T, S \rangle = T_{\lambda_1 \cdots \lambda_r} S^{\lambda_1 \cdots \lambda_r}, \quad \|T\|^2 = T_{\lambda_1 \cdots \lambda_r} T^{\lambda_1 \cdots \lambda_r}$$

值得注意的是为了以后方便对于整体内积（,）要以 $r!$ 除之如下。

$$(T, S) = \frac{1}{r!} \int_M \langle T, S \rangle d\sigma.$$

例题 2．在紧致可定向黎曼空间 M^n 里，任意的向量场 $X = (\xi^\lambda)$ 满足下列公式。

$$\int_M \left[\{\nabla^\alpha \nabla_\alpha \xi_\lambda + R_{\alpha\lambda} \xi^\alpha + (1 - \frac{2}{n}) \nabla_\lambda \nabla_\alpha \xi^\alpha\} \xi^\lambda + f(X) \right] d\sigma = 0.$$

式中的 $f(X)$ 是由下式给定的数量函数。

$$f(X) = \frac{1}{2} \|\nabla_\lambda \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\lambda - (2/n) \nabla_\alpha \xi^\alpha g_{\lambda\mu}\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\|\mathscr{L}_X g-(2/n)\delta X\cdot g\|^2.$$

解. 令

$$A_{\lambda\mu}=\nabla_\lambda\xi_\mu+\nabla_\mu\xi_\lambda-(2/n)\nabla^\alpha\xi_\alpha g_{\lambda\mu}$$

则

$$A_{\lambda\mu}=A_{\mu\lambda},\qquad g^{\lambda\mu}A_{\lambda\mu}=0$$

成立。因此

$$2f(X)=\|A_{\lambda\mu}\|^2=A_{\lambda\mu}A^{\lambda\mu}=A_{\lambda\mu}(\nabla^\lambda\xi^\mu+\nabla^\mu\xi^\lambda-(2/n)\nabla_\alpha\xi^\alpha g^{\lambda\mu})$$
$$=2A_{\lambda\mu}\nabla^\lambda\xi^\mu-(2/n)\nabla_\alpha\xi^\alpha g^{\lambda\mu}A_{\lambda\mu}=2A_{\lambda\mu}\nabla^\lambda\xi^\mu.$$

故

$$f(X)=A_{\lambda\mu}\nabla^\lambda\xi^\mu.$$

再来计算$\nabla^\lambda A_{\lambda\mu}$

$$\nabla^\lambda A_{\lambda\mu}=\nabla^\lambda\nabla_\lambda\xi_\mu+\nabla_\lambda\nabla_\mu\xi^\lambda-(2/n)\nabla^\lambda\nabla_\alpha\xi^\alpha g_{\lambda\mu}.$$
$$=\nabla^\lambda\nabla_\lambda\xi_\mu+(\nabla_\mu\nabla_\lambda\xi^\lambda+R_{\lambda\mu\alpha}{}^\lambda\xi^\alpha)-(2/n)\nabla_\mu\nabla_\alpha\xi^\alpha$$
$$=\nabla^\lambda\nabla_\lambda\xi_\mu+R_{\mu\alpha}\xi^\alpha+\left(1-\frac{2}{n}\right)\nabla_\mu\nabla_\alpha\xi^\alpha \tag{1}$$

将这些式子代入

$$\nabla^\lambda(A_{\lambda\mu}\xi^\mu)=(\nabla^\lambda A_{\lambda\mu})\xi^\mu+A_{\lambda\mu}\nabla^\lambda\xi^\mu$$

并积分之，左边为 0，故得所求之式。

习　题　七

总是假设 M^n 是 $n(>2)$ 维黎曼空间。

1. 在紧致 M^n 里，如非常数的函数 f 满足

$$\Delta f=cf,\qquad c\ \text{为常数}$$

则 c 是负的。

2. 对于紧致可定向 M^n 上的函数 f_1，f_2，

$$(\Delta f_1,f_2)=-(\nabla f_1,\nabla f_2).$$

3. 在紧致可定向的 M^n 上，对于满足 $\mathrm{div}X=0$ 的向量场 X 与任意的函数 f，下式成立。

$$\int_M X f d\sigma = 0$$

4. 在紧致 M^n 里，满足 $\nabla\nabla T = 0$ 的张量场是平行张量场。

5. 切丛空间TM（参照§6 例题 1）是可定向的。

6. 紧致微分流形一定可以具有黎曼度量。

注意. 更普遍些有：如果 C^r 级（$1 \leqslant r \leqslant \infty$）流形满足第二可数公理，则具有 C^{r-1} 级黎曼度量。

7. 在平行的反称张量场 $f_{\lambda\mu}$ 存在的紧致 M^n 里，如果函数ϕ，ψ 满足

$$f_{\lambda\alpha}\nabla^\alpha\phi = \nabla_\lambda\psi,$$

则 ψ 为实常数。

8. 设Γ为紧致可定向 M^n 的一个度量仿射联络，关于 $\overline{\Gamma}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} = \Gamma_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu}$ 的共变导数用 $\overline{\nabla}$ 表示。这时，对于任意的向量场 ξ^λ

$$\int_M \overline{\nabla}_\lambda \xi^\lambda d\sigma = 0.$$

9. 设 φ 在紧致可定向 M^n 上是到处取正值、权 1 的相对数量函数（参照$p.23$）。这时

（i） 可以使用 φ 代替 $\sqrt{g}$ 定义 M^n 上的积分。

（ii） 设 Γ 为任意仿射联络，则关于坐标变换 $\{x^\lambda\}\to\{x'^\lambda\}$，下式成立。

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'^\lambda} - \varphi'\Gamma'_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\mu} = \Delta\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} - \varphi\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta}\right)$$

式中设 $\varphi' = \varphi(x')$，$\Delta = \det(\partial x/\partial x')$。

（iii） 如果关于仿射联络 Γ，φ 满足

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^\lambda} = \varphi\Gamma_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\alpha}$$

则对于任意向量 ξ^λ，

$$\int_M (\overline{\nabla}_\lambda\xi^\lambda)\varphi dx^1\cdots dx^n = 0.$$

10. 数量曲率 $R=$常数 $\leqslant 0$ 的紧致M^n的共形开玲向量是开玲

向量。

11. 在紧致 M^n 里，保持利齐张量不变的共形对应是相似对应。

12. M^n 的共形开玲向量满足下式。

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha\xi^\lambda + R_\alpha{}^\lambda\xi^\alpha + \left(1-\frac{2}{n}\right)\nabla^\lambda\nabla_\alpha\xi^\alpha = 0. \qquad (1)$$

13. 在利齐形式为负定的紧致 M^n 里，除 0 以外不存在共形开玲向量。

14. 在紧致 M^n 里，ξ^λ 为共形开玲向量的充要条件是第 12 题的 (1) 成立。

15. 在紧致可定向的 M^n 里，对于任意的向量 ξ^λ 下式成立。

$$\int_M \{(\nabla^\alpha\nabla_\alpha\xi_\lambda - R_\lambda{}^\alpha\xi_\alpha)\xi^\lambda + (\nabla_\alpha\xi^\alpha)^2 + f(X)\}d\sigma = 0.$$

式中
$$f(X) = (1/2)\|\nabla_\lambda\xi_\mu - \nabla_\mu\xi_\lambda\|^2.$$

16. 当 M^n 的（共变）向量 u_λ 满足

$$\nabla_\lambda u_\mu = \nabla_\mu u_\lambda, \qquad \nabla_\alpha u^\alpha = 0$$

时，称为**调和向量**。关于调和向量 u_λ，

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha u_\lambda - R_\lambda{}^\alpha u_\alpha = 0 \qquad (1)$$

成立。

17. 在紧致 M^n 里，向量 u_λ 为调和向量的充要条件是前题的 (1) 成立。

18. 在利齐形式是正定的紧致 M^n 里，除 0 以外不存在调和向量。

19. 在紧致 M^n 里，关于调和向量 u 与开玲向量 X 下式成立。

(i) $\langle u, X\rangle$ = 一定，　　(ii) $\mathcal{L}_X u = 0$.

20. 如紧致 M^n 的射影变换保持利齐张量不变，则此变换是仿射变换。

21. 在利齐形式为负定的紧致 M^n 里，除 0 以外不存在射影开玲向量。

22. 紧致 M^n 的相似变换是等距变换。

23. 设紧致 M^n，$\overline{M}^n$ 的数量曲率为 R，$\overline{R}$。如

$$R \leqslant 0, \qquad \bar{R} \geqslant 0$$

则除了 R 与 $\bar{R}$ 同时恒等于0的情形外，不存在从 M^n 到 $\bar{M}^n$ 的共形映射。

24. 数量曲率为 0 的紧致 M^n 的共形变换是等距变换。

25. 设紧致 M^n，$\bar{M}^n$ 的数量曲率满足

$$R \leqslant 0, \qquad \bar{R} \leqslant 0$$

而且不恒等于 0。这时共形映射 ϕ：$M^n \to \bar{M}^n$ 为相似映射的充要条件是：存在常数 k 使得

$$\overset{*}{R}(p) = \bar{R}(\bar{p}) = e^{2k} R(p)$$

成立。式中设 $\overset{*}{R}$ 为诱导度量 $\overset{*}{g} = \Phi(\bar{g}) = e^{2\rho} g$ 的数量曲率，又设 $\bar{p} = \phi(p)$。此外，这时 $\rho = k$ 成立。

26. 设 M^n，$\bar{M}^n$ 与前题相同。这时共形映射 ϕ 为等距映射的充要条件是 ϕ 保持数量曲率不变。

27. 设紧致 M^n，$\bar{M}^n$ 的数量曲率是常数，而且 $R \leqslant 0$，$\bar{R} \leqslant 0$。这时共形映射 ϕ：$M^n \to \bar{M}^n$ 是相似映射而且

$$\bar{R}(\phi(p))\,\Phi(\bar{g}) = R(p) g$$

成立。

28. 在 R = 常数 $\leqslant 0$ 的紧致 M^n 里，共形变换是等距变换。

29. 在紧致可定向的 M^n 里，下列积分公式成立。

$$\int_M \{K(p) - \|\nabla^\lambda R_{\lambda\mu\nu\omega}\|^2\} d\sigma = -\frac{1}{2}\int_M \|\nabla_\alpha R_{\lambda\mu\nu\omega}\|^2 d\sigma \leqslant 0$$

式中的 $K(p)$，$p \in M^n$ 是由下式定义的函数。

$$K(p) = R_{\alpha\beta} R^{\alpha\lambda\mu\nu} R^{\beta}{}_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} R^{\lambda\mu\rho\sigma} R_{\lambda\mu\alpha\beta} R^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} + 2 R^{\lambda\alpha\mu\beta} R_{\lambda\rho\mu\sigma} R^{\rho}{}_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}.$$

30. 设紧致可定向的 M^n 满足下列条件之一。

（i） $\nabla_\lambda R_{\mu\nu} = 0$（利齐平行空间）。

（ii） 爱因斯坦空间。

(iii) 数量曲率为常数的共形平坦空间。

这时下列公式成立。

$$\int_M K(p)d\sigma = -\frac{1}{2}\int_M \|\nabla_\alpha R_{\lambda\mu\nu\omega}\|^2 d\sigma \leqslant 0.$$

式中的 $K(p)$ 是前题中定义的函数。

故如在各点 p

$$K(p) \geqslant 0$$

则 M^n 是局部对称空间。

31. 如四维紧致爱因斯坦空间的断面曲率总是满足

$$\frac{1}{4} < \rho(X,Y) \leqslant 1$$

则此空间为常曲率空间。

32. 设 $A_r(M)$ 是 M^n 上的 r 阶反称共变张量场全体所作向量空间。设 $X=(\xi^\lambda)$ 为任意向量，由

$$i(X)u = (\xi^\alpha u_{\alpha\lambda_2\cdots\lambda_r}), \quad u \in A_r(M),$$

$$e(X)v = \left(\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\xi_{\lambda_i} v_{\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_r}\right), \; v \in A_{r-1}(M)$$

定义 $i(X)$，$e(X)$. 式中的 $\hat{\lambda}_i$ 表示去掉 λ_i。这时

$$i(X): A_r(M) \to A_{r-1}(M), \qquad e(X): A_{r-1}(M) \to A_r(M)$$

是互相对偶的算子。即对于任意的 $u \in A_r(M)$，$v \in A_{r-1}(M)$ 下式成立。

$$(i(X)u, v) = (u, e(X)v)$$

注意，$i(X)$，$e(X)$ 分别称为关于 X 的**内积算子，外积算子**。将共变向量，数量函数分别看做1阶，0阶反称共变张量，对于 $f \in A_0(M)$ 规定

$$i(X)f = 0,$$

$$e(X)f = fX = (f\xi_\lambda).$$

33. 关于 $u \in A_r(M)$，定义

$$(du)_{\mu\lambda_2\cdots\lambda_r} = \frac{\partial u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}}{\partial x^\mu} - \sum_{i=1}^{r}\frac{\partial u_{\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}\mu\lambda_{i+1}\cdots\lambda_r}}{\partial x^{\lambda_i}}$$

则 $du \in \boldsymbol{A}_{r+1}(M)$,

$$(du)_{\mu\lambda_1\cdots\lambda_r} = \nabla_\mu u_{\lambda_1\cdots\lambda_r} - \sum_{i=1}^{r} \nabla_{\lambda_i} u_{\lambda_1\cdots\mu\cdots\lambda_r}$$

成立。

注意. du 的分量也可书写如下。

$$(du)_{\lambda_1\cdots\lambda_{r+1}} = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} \frac{\partial u_{\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_{r+1}}}{\partial x^{\lambda_i}}$$

这时又可写做

$$(du)_{\lambda_1\cdots\lambda_{r+1}} = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} \nabla_{\lambda_i} u_{\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_{r+1}}.$$

du称为 u 的**外微分**。对于 $f \in \boldsymbol{A}_0(M)$，设

$$df = \mathrm{grad} f$$

34. 对于 $u \in \boldsymbol{A}_r(M)$ 与任意向量 X

$$\theta(X)u = (di(X) + i(X)d)u$$

成立。式中设

$$\theta(X)u = \mathcal{L}_X u.$$

注意. 不仅在黎曼空间，就是在微分流形上也可定义 $i(X)$, $e(X)$, d, $\theta(X)$。将 $\mathcal{L}_X$ 写做 $\theta(X)$ 是为了和其他算子的形状协调。

35. 对于任意的 $u \in \boldsymbol{A}_r(M)$,

$$ddu = 0.$$

36. 定义 δ: $\boldsymbol{A}_r(M) \to \boldsymbol{A}_{r-1}(M)$ 为

$$(\delta u)_{\lambda_2\cdots\lambda_r} = \nabla^a u_{a\lambda_2\cdots\lambda_r}, \quad u \in \boldsymbol{A}_r(M), \quad r \geqslant 1,$$

$$\delta f = 0, \quad f \in \boldsymbol{A}_0(M)$$

则

$$\delta\delta u = 0.$$

37. 关于反称共变张量，d, $-\delta$ 是对偶算子。即在紧致可定向的 M^n 里，对于任意的 $u \in \boldsymbol{A}_r(M)$, $v \in \boldsymbol{A}_{r+1}(M)$,

$$(du, v) + (u, \delta v) = 0$$

成立。

注意。有的书定义的 δ 与此处的符号不同。

38. 设 $w\in \boldsymbol{A}_r(M)$，则

(i) $$(\delta dw,w)+(dw,dw)=0,$$

(ii) $$(d\delta w,w)+(\delta w,\delta w)=0,$$

(iii) $$(\Delta w,w)+(dw,dw)+(\delta w,\delta w)=0$$

成立。式中的 Δ 是由

$$\Delta=d\delta+\delta d:\quad \boldsymbol{A}_r(M)\to \boldsymbol{A}_r(M)$$

定义，称为**拉氏算子**。

39. Δ 是自对偶的。即对于 $u,\ v\in \boldsymbol{A}_r(M)$

$$(\Delta u,v)=(u,\Delta v)$$

40. 在紧致可定向的爱因斯坦空间里，对于任意的函数 ϕ

$$(\Delta\phi+k\phi,\Delta\phi+nk\phi)=\int_M\|\nabla_\lambda\nabla_\mu\phi+k\phi g_{\lambda\mu}\|^2d\sigma$$

成立。式中 $k=R/n(n-1)$。

故在紧致爱因斯坦空间里，

$$\Delta\phi+nk\phi=0,\quad \nabla_\lambda\nabla_\mu\phi+k\phi g_{\lambda\mu}=0$$

互相等价。

41. 我们规定将 Δu 的分量写做 $(\Delta u)_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$

则

$$\Delta f=\nabla^\alpha\nabla_\alpha f,$$

$$(\Delta u)_\lambda=\nabla^\alpha\nabla_\alpha u_\lambda-R_\lambda{}^\alpha u_\alpha,$$

$$(\Delta u)_{\lambda\ldots\lambda_r}=\nabla^\alpha\nabla_\alpha u_{\lambda\ldots\lambda_r}-\sum_{i=1}^r R_{\lambda_i}{}^\alpha u_{\lambda\ldots\alpha\ldots\lambda_r}$$

$$-\sum_{i<j}R_{\lambda_i\lambda_j}{}^{\alpha\beta}u_{\lambda_1\ldots\alpha\ldots\beta\ldots\lambda_r},\ r>1$$

式中右边 u 的指标里 α,β 占据了第 i 号的 λ_i，第 j 号的 λ_j 的位置。

42. 如 $w\in \boldsymbol{A}_r(M)$ 满足 $dw=\delta w=0$，则称为 r 阶**调和张量**。如 $w\in \boldsymbol{A}_r(M)$ 是调和张量，则

$$\Delta w=0$$

反之，如在紧致 M^n 里，$w\in \boldsymbol{A}_r(M)$ 满足 $\Delta w=0$，则 w 是调和张量。

注意。关于调和张量，人们知道下列定理。

霍奇（Hodge）定理。在紧致可定向 M^n 里，（实系数）线性无关的 r 阶调和张量的最大个数等于 M^n 的 r 维**贝蒂数**。

贝蒂数是拓扑不变量可用微分几何量计算说明调和张量是重要的.

43. 在紧致 M^n 里，如 r 阶调和张量 w 是 $w=du$，$u\in \boldsymbol{A}_{r-1}(M)$，或 $w=\delta v$，$v\in \boldsymbol{A}_{r+1}(M)$ 的形状，则 w 是零张量。

44. (i) 对于任意的 $u\in \boldsymbol{A}_r(M)$，下式成立。

$$\int_M (\langle \Delta u, u\rangle + \|\nabla u\|^2) d\sigma = -r\int_M F_r(u) d\sigma,$$

式中的 $F_r(u)$ 是由下式定义的 u 的二次式。

$$F_1(u) = R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$$

$$F_r(u) = R_{\alpha\beta}u^{\alpha\lambda_2\cdots\lambda_r}u^\beta{}_{\lambda_2\cdots\lambda_r} + \frac{r-1}{2}R_{\rho\sigma\alpha\beta}u^{\rho\sigma\lambda_3\cdots\lambda_r}u^{\alpha\beta}{}_{\lambda_3\cdots\lambda_r},\quad r\geqslant 2$$

(ii) 特别是对于调和张量 u，

$$r\int_M F_r(u) d\sigma = -\int_M \|\nabla u\|^2 d\sigma \leqslant 0$$

由此可见，在 $\boldsymbol{A}_r(M)$ 里如 $F_r(u)$ 是正定的，则除了 0 以外不存在 r 阶调和张量。故紧致可定向的 M^n 的 r 维贝蒂数 $b_r(M)$ 是 0.

45. 如紧致可定向的 M^n 是共形平坦而且利齐形式是正定的，则

$$b_r(M)=0,\ r=1,\cdots,\ n-1.$$

故对于特例，数量曲率为正的常曲率空间，$b_r(M)=0$，$1\leqslant r\leqslant n-1$ 也成立。

46. 如紧致可定向 M^n 是 δ 夹紧的，又满足

当 $n=2m$ 时 $\quad \delta > \dfrac{1}{4}$，

当 $n=2m+1$ 时 $\quad \delta > \dfrac{2(m-1)}{8m-5}$

则 $b_2(M)=0$ 成立。

注意。由矩阵论知道下列事实成立。存在标准正交基使得反称张量 $u_{\lambda\mu}$ 在点 p 满足

$$u_{ii^*}=-u_{i^*i}\geqslant 0,\ i=1,\cdots,m,\ i^*=m+i,$$

其他分量全是 0 .

其中 m 表示 $n/2$ 的整数部分 $[n/2]$。

47. 设 $T_r{}^s(M)$ 是 M^n 上的(r,s)阶张量场全体所作向量空间。这时定义

$$B(X):T_r{}^s(M)\to T_r{}^s(M)$$

为

$$B(X)T=-(\theta(X)+\mathrm{div}X)T$$

则对于任意向量 X 与 $S\in T_s{}^r(M)$, $T\in T_r{}^s(M)$, 下式成立。

$$(\theta(X)S,T)=(S,B(X)T).$$

注意. 关于 $T_s{}^r(M)$, $T_r{}^s(M)$, $\theta(X)$ 与 $B(X)$ 是对偶算子。然因 $\theta(X)$ 与升降标不可交换，故看做 $T_s{}^r(M)=T_r{}^s(M)=T^{r+s}(M)$ 时并非对偶算子。

48. 定义 $\bar\theta(X):T_r{}^0(M)\to T_r{}^0(M)$ 为

$$(\bar\theta(X)v)_{\mu_1\cdots\mu_r}=-(\theta(X)v)_{\mu_1\cdots\mu_r}-(\mathrm{div}X)v_{\mu_1\cdots\mu_r}$$
$$+\sum_{i=1}^{r}g^{\varepsilon\alpha}(\theta(X)g)_{\mu_i\varepsilon}v_{\mu_1\cdots\alpha\cdots\mu_r}$$

则对于 u, $v\in T_r{}^0(M)$

$$(\theta(X)u,v)=(u,\bar\theta(X)v)$$

成立。

注意. 设 i 为根据度量张量等同的同构映射 $T_r{}^0(M)\to T_0{}^r(M)$, 则

$$\bar\theta(X)=i^{-1}\circ B(X)\circ i$$

成立。式中设$B(X)$是在前题里定义的。

49. 做为 $A_r(M)$ 上的算子，下列关系成立。

(i) $$-\bar\theta(X)=\delta e(X)+e(X)\delta,$$

(ii) $$\delta\bar\theta(X)=\bar\theta(X)\delta$$

50. 在紧致可定向的 M^n 里，开玲向量 X 与调和张量 u 满足

$$\theta(X)u=0.$$

习 题 解 答

习题一解答 (pp.9～13)

1. (i) 由(1.7)得 $(1+0)x=1x+0x$. ∴ $x=x+0x$。将 x 的逆元 x' 加在两边，则

$$0=x'+x=x'+(x+0x)=(x'+x)+0x=0+0x=0x.$$

(ii) 由 (1.7) 得 $\{1+(-1)\}x=1x+(-1)x$. ∴ $0=x+(-1)x$。将 x 的逆元 x' 加在两边，则

$$x'+0=x'+\{x+(-1)x\}=(x'+x)+(-1)x=0+(-1)x.$$

∴ $x'=(-1)x$。因将x'记做$-x$之故$-x=(-1)x$.

2. (i) $a_1x_1+\cdots+a_sx_s=0$ 可写做 $a_1x_1+\cdots+a_sx_s+0x_{s+1}+\cdots+0x_r=0$.然因 $x_1,\cdots,x_r$ 线性无关，故其系数全是 0. ∴ $a_1=\cdots=a_s=0$。从而 $x_1,\cdots,x_s$ 也是线性无关。

(ii) 存在不全为 0 的 $a_1,\cdots,a_s\in \boldsymbol{R}$ 使得 $a_1x_1+\cdots+a_sx_s=0$。故

$$a_1x_1+\cdots+a_sx_s+0x_{s+1}+\cdots+0x_r=0$$

对不全为 0 的系数成立，因此$x_1,\cdots,x_r$线性相关。

3. 设$0=(0,\cdots,0)$, $-x=(-x_1,\cdots,-x_n)$，则容易证明满足向量空间的公理体系（定义 1.1)。其次证明V是 n 维。考虑向量

$$e_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,\ e_n=(0,\cdots,0,1)$$

对于任意的 $a_i\in \boldsymbol{R}$,

$$\begin{aligned}a_1e_1+\cdots+a_ne_n&=a_1(1,0,\cdots,0)+\cdots+a_n(0,\cdots,0,1)\\&=(a_1,0,\cdots,0)+\cdots+(0,\cdots,a_n)\\&=(a_1+0+\cdots+0,\ 0+a_2+0+\cdots+0,\\&\qquad\cdots,0+\cdots+0+a_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\end{aligned}$$

成立。今设

$$a_1e_1+\cdots+a_ne_n=0=(0,\cdots,0)$$

则得 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(0,\cdots,0)$，故由相等的定义可得 $a_1=\cdots=a_n=$

0。因此，$e_1,\cdots,e_n$ 线性无关。以下证明任意 $n+1$ 个向量

$$x_i=(x_1{}^i,\cdots,x_n{}^i),\ \ i=1,\cdots,n+1,$$

是线性相关的。作以这些分量为系数的联立方程

$$\sum_{i=1}^{n+1}a_i x_\lambda{}^i=0,\ \ \lambda=1,\cdots,n,$$

因未知数有 $n+1$ 个，式子数目是 n 个，故存在不全是 0 的解 a_i。由此 a_i 得

$$\sum_{i=1}^{n+1}a_i x_i=\sum a_i\,(x_1{}^i,\cdots,x_n{}^i)=\sum(a_i x_1{}^i,\cdots,a_i x_n{}^i)$$

$$=\left(\sum a_i x_1{}^i,\cdots,\ \sum a_i x_n{}^i\right)=(0,\cdots,0)=0$$

因此 $x_1,\cdots,x_{n+1}$ 线性相关。从而 V 是 n 维。

4. 设 $A=(a_j{}^i)$不正则，则存在满足

$$\sum_{j=1}^{r}c^j a_j{}^i=0,\ \ i=1,\cdots,r \qquad (1)$$

的不全为 0 的解 $c^1,\cdots,c^r$。由此 c^j 得

$$\sum c^j\overline{e}_j=\sum c^j\sum a_j{}^i e_i=\sum\left(\sum c^j a_j{}^i\right)e_i=0, \qquad (2)$$

故 $\overline{e}_1\cdots,\overline{e}_r$ 线性相关。

反之，如 $\overline{e}_1,\cdots,\overline{e}_r$ 线性相关，则存在满足 (2) 的不全为 0 的 c^j。然因 $e_1,\cdots,e_r$ 线性无关，故其系数为 0，因此得 (1)，可见 A 不正则。

5. (i) 设 $x,\ y\in U$，则 $x=\sum a_i x_i$，$y=\sum b_i x_i$，故得 $x+y=\sum(a_i+b_i)x_i\in U$，$ax=\sum aa_i x_i\in U$，由定理 1.1 可见 U 是子向量空间。

(ii) 只要证出属于 U 的 $r+1$ 个任意向量 $y_1,\cdots,y_{r+1}$ 线性相关即可。如 $y_1,\cdots,y_r$ 线性相关，则 $y_1,\cdots,y_{r+1}$ 也线性相关，故设 $y_1,\cdots,y_r$ 线性无关。

$$y_i = \sum_{j=1}^{r} a_i{}^j x_j, \quad i = 1, \cdots, r \qquad (1)$$

的系数矩阵 $A = (a_i{}^j)$ 由前题知是正则的，故设逆矩阵为 $B = (b_i{}^j)$，则 $\sum b_k{}^i a_i{}^j = \delta_k{}^j$。(1)的两边乘 $b_k{}^i$ 并关于 i 求和，则得

$$\sum b_k{}^i y_i = \sum \left(\sum b_k{}^i a_i{}^j \right) x_j = x_k, \qquad (2)$$

各 $x_1, \cdots, x_r$ 可用 $y_1, \cdots, y_r$ 的线性组合表达。因 $y_{r+1} \in U$，故可表示为

$$y_{r+1} = a^1 x_1 + \cdots + a^r x_r = \sum a^k x_k$$

的形状，将(2)代入之得 $y_{r+1} = \sum \left(\sum b_k{}^i a^k \right) y_i$，可见 $y_1, \cdots, y_{r+1}$ 线性相关。

6. 易证 W 是向量空间。特别是 $(0,0)$ 是 W 的零向量，(a, x) 的逆元是 $(-a, -x)$，以下证明 W 是 $n+m$ 维。首先记 $(0, x) = x$，$(a, 0) = a$ 则由和的定义知

$$a + x = (a, 0) + (0, x) = (a, x)$$

成立。设 $\{e_\alpha\}$，$\alpha = 1, \cdots, n$，$\{f_i\}$，$i = 1, \cdots, m$ 分别为 V，U 的基底。令

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_m f_m = 0.$$

其中设系数 λ_α，μ_j 为实数。从前述事实可见上式的含义是

$$(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, \ \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_m f_m) = 0 = (0, 0)$$

故

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0, \quad \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_m f_m = 0$$

因此得

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0, \qquad \mu_1 = \cdots = \mu_m = 0,$$

可见 $e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_m$ 在 W 里线性无关。又因 W 的任意元 (a, x) 可写做

$$(a, x) = a + x = a^\alpha e_\alpha + x^i f_i$$

故W由线性无关的 $n+m$ 个向量张成。根据前题得W是 $n+m$ 维。

7. 设 $x=x^\lambda e_\lambda=\bar{x}^\lambda \bar{e}_\lambda=x'^\lambda e'_\lambda$，求 x^λ 与 x'^λ 的关系。因 $e'_\lambda=c_\lambda{}^\mu \bar{e}_\mu=c_\lambda{}^\mu a_\mu{}^\nu e_\nu$，故

$$x=x'^\lambda e'_\lambda=x'^\lambda c_\lambda{}^\mu a_\mu{}^\nu e_\nu=x^\nu e_\nu$$

$$\therefore\quad (x'^\lambda c_\lambda{}^\mu a_\mu{}^\nu - x^\nu)e_\nu=0.$$

因$\{e_\nu\}$是基底，故得下式。

$$x'^\lambda c_\lambda{}^\mu a_\mu{}^\nu=x^\nu$$

8. $\phi(0)=\phi(0x)=0\phi(x)=0.$

$\phi(-x)=\phi((-1)x)=(-1)\phi(x)=-\phi(x).$

9. 证明$\phi(V),\phi^{-1}(0)$满足定理1.1的条件。设$x',y'\in\phi(V)$，则存在 x，$y\in V$使得 $x'=\phi(x)$，$y'=\phi(y)$，故

$$x'+y'=\phi(x)+\phi(y)=\phi(x+y)\in\phi(V)$$

$$ax'=a\phi(x)=\phi(ax)\in V.$$

因此 $\phi(V)$是U的子空间。其次设 $x,y\in\phi^{-1}(0)$，则 $\phi(x)=\phi(y)=0$，故 $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)=0$。$\therefore$ $x+y\in\phi^{-1}(0)$. 从 $\phi(ax)=a\phi(x)=0$ 得 $ax\in\phi^{-1}(0)$，因此 $\phi^{-1}(0)$是V的子空间。

10. 令ϕ: $V\to U$，ψ: $U\to W$的复合为$\theta=\psi\circ\phi$,则对于$x,y\in V$，$a\in \mathbf{R}$，

$$\begin{aligned}\theta(x+y)&=\psi\circ\phi(x+y)=\psi(\phi(x+y))\\&=\psi(\phi(x)+\phi(y))=\psi(\phi(x))+\psi(\phi(y))=\theta(x)+\theta(y).\end{aligned}$$

同理也可得到 $\theta(ax)=a\theta(x)$，故 θ 为线性映射。

11. (i) 设ϕ是一对一。从$\phi(0)=0$以及一对一知$\phi^{-1}(0)=\{0\}$。反之，设 $\phi^{-1}(0)=\{0\}$。如 $\phi(x)=\phi(y)$，则 $\phi(x-y)=0$。故 $x-y\in\phi^{-1}(0)$，$x=y$。即 ϕ 是一对一。

(ii) 设 $\phi(e_\lambda)$，$\lambda=1,\cdots,n$,线性无关。如 $\phi(x)=0$，则从 $0=\phi(x)=\phi(x^\lambda e_\lambda)=x^\lambda\phi(e_\lambda)$ 得 $x^\lambda=0$。故 $\phi^{-1}(0)=\{0\}$。反之，设 $\phi(e_\lambda)$ 线性相关，则存在不全为 0 的 x^1，$\cdots$，x^n 使得 $x^\lambda\phi(e_\lambda)=0$。因 $\phi(x^\lambda e_\lambda)=0$，故 $x=x^\lambda e_\lambda\neq 0$属于 $\phi^{-1}(0)$。从而ϕ 不同构。

(iii) 设ϕ同构。因$\phi(e_\lambda)\in U$线性无关，故$n\leqslant m$。设$B=(b_\lambda{}^i)$的秩$<n$，则存在不全为0的c^λ满足$c^\lambda b_\lambda{}^i=0$。因为$c^\lambda\phi(e_\lambda)=c^\lambda b_\lambda{}^i f_i=0$，所以$\phi(e_\lambda)$线性相关，与假设矛盾。同理设$\phi(e_\lambda)$线性相关，则$B$的秩$<n$。

12. 对于 $x=(x^1,\cdots,x^n)$，

$$\phi(x)=(x^1,\cdots,x^r,0,\cdots,0),\quad \psi(x)=(0,\cdots,0,x^{r+1},\cdots,x^n)$$

因此

$$\psi\circ\phi(x)=\psi(x^1,\cdots,x^r,0,\cdots,0)=(0,\cdots,0)=0.$$

其他亦同。

13. $\phi\circ\psi=\phi\circ(I-\phi)=\phi-\phi^2=0$，$\psi^2=(I-\phi)\circ(I-\phi)=I^2-2\phi+\phi^2=I-\phi=\psi$。其他亦同。

14. 设V，U分别是n维向量空间，又设$\{e_\lambda\}$，$\{f_\lambda\}$是它们的基底。如定义ϕ：$V\to U$为$\phi(x^\lambda e_\lambda)=x^\lambda f_\lambda$，则$\phi$是在上同构映射。

15. 设$\{f^\lambda\}$为V^*的基底。任取V的一组基底$\{e_\lambda'\}$，令$f^\lambda(e_\mu')=a_\mu{}^\lambda$，则矩阵$A=(a_\mu{}^\lambda)$正则可证明如下。如$A$不正则，则存在不全为0的实数$c^1,\cdots,c^n$满足$c^\mu a_\mu{}^\lambda=0$。因$0=c^\mu a_\mu{}^\lambda=c^\mu f^\lambda(e_\mu')=f^\lambda(c^\mu e_\mu')$，令$x=c^\mu e_\mu'$，则$x\neq 0$而且

$$f^\lambda(x)=0,\quad \lambda=1,\cdots,n \tag{1}$$

成立。因V^*的元可用$\{f^\lambda\}$的线性组合表达，故由(1)知对于任意的$f\in V^*$，$f(x)=0$成立。然由§2例题2知应存在$f(x)\neq 0$的$f\in V^*$，这不合理。故A正则。令$A^{-1}=B=(b_\lambda{}^\mu)$，$e_\lambda=b_\lambda{}^\mu e_\mu'$，则$\{e_\lambda\}$也是$V$的基底而且

$$f^\lambda(e_\mu)=f^\lambda(b_\mu{}^\nu e_\nu')=b_\mu{}^\nu a_\nu{}^\lambda=\delta_\mu{}^\lambda$$

成立。可见$\{f^\lambda\}$是$\{e_\mu\}$的对偶基底。

注意： 根据§2例题1，$V=(V^*)^*$，故知$\{f^\lambda\}$为$\{e_\lambda\}$的对偶基底时，则$\{e_\lambda\}$是$\{f^\lambda\}$的对偶基底。

16. 研究一下在基底的变换$\bar{f}^\lambda=b_\mu{}^\lambda f^\mu$下，$\bar{T}^{\lambda\mu}=b_\alpha{}^\lambda b_\beta{}^\mu T^{\alpha\beta}$对于$\bar{T}^{\lambda\mu}=\delta^{\lambda\mu}$，$T^{\alpha\beta}=\delta^{\alpha\beta}$是否成立。一般地说$\delta^{\lambda\mu}=\sum_\alpha b_\alpha{}^\lambda b_\alpha{}^\mu$不一定成立，故$\delta^{\lambda\mu}$不是反变张量的分量。

17. 设$(1,p)$阶张量T的分量为 $T^{\mu}{}_{\lambda_1\dots\lambda_p}$。对于 $x_1,\dots,x_p\in V$，考虑对应

$$T':\ (x_1,\cdots,x_p)\to T^{\mu}{}_{\lambda_1\dots\lambda_p}x_1{}^{\lambda}\cdots x_p{}^{\lambda_p}e_{\mu}\in V$$

则T'是从$V\times\cdots\times V$（p个）到V的多重线性映射。反之，设给定多重线性映射T'，对于任意的 $u\in V^*$，定义T为

$$T(u,x_1,\cdots,x_p)=\langle T'(x_1,\cdots,x_p),u\rangle$$

可以证明它是$(1,p)$阶张量。又知道T与T'的这种对应是一对一的。

18. 在基底的变换下，$\overline{S}_{\lambda\mu}=a_{\lambda}{}^{\alpha}a_{\mu}{}^{\beta}S_{\alpha\beta}$。因此 $\overline{T}_{\mu\lambda}=\overline{S}_{\lambda\mu}=a_{\lambda}{}^{\alpha}a_{\mu}{}^{\beta}S_{\alpha\beta}=a_{\lambda}{}^{\alpha}a_{\mu}{}^{\beta}T_{\beta\alpha}=a_{\mu}{}^{\beta}a_{\lambda}{}^{\alpha}T_{\beta\alpha}$。故$T$也满足张量的变换规律。

19. 如证出二阶张量的情况，则其他情况同理可得。设 $S_{\alpha\beta}$ 对称，则从$\overline{S}_{\lambda\mu}=a_{\lambda}{}^{\alpha}a_{\lambda}{}^{\beta}S_{\alpha\beta}$ 与 $\overline{S}_{\mu\lambda}=a_{\mu}{}^{\beta}a_{\lambda}{}^{\alpha}S_{\beta\alpha}=a_{\mu}{}^{\beta}a_{\lambda}{}^{\alpha}S_{\alpha\beta}$ 得 $\overline{S}_{\lambda\mu}=\overline{S}_{\mu\lambda}$。反称的情况亦同。

20. $$T_{\lambda\mu\nu}=T_{\mu\lambda\nu}=-T_{\nu\lambda\mu}=-T_{\lambda\nu\mu}=T_{\mu\nu\lambda}=T_{\nu\mu\lambda}=-T_{\lambda\mu\nu}$$

$\therefore\ 2T_{\lambda\mu\nu}=0$，因此 $T_{\lambda\mu\nu}=0$。

21. (i) $$\begin{aligned}T_{\lambda\mu\nu\omega}&=-T_{\mu\nu\lambda\omega}-T_{\nu\lambda\mu\omega}=T_{\mu\nu\omega\lambda}-T_{\nu\lambda\mu\omega}\\&=(-T_{\nu\omega\mu\lambda}-T_{\omega\mu\nu\lambda})-T_{\nu\lambda\mu\omega}=T_{\nu\omega\lambda\mu}+T_{\omega\mu\lambda\nu}-T_{\nu\lambda\mu\omega}\\&=(-T_{\omega\lambda\nu\mu}-T_{\lambda\nu\omega\mu})-(T_{\mu\lambda\omega\nu}+T_{\lambda\omega\mu\nu})-T_{\nu\lambda\mu\omega}\end{aligned}$$

由此得$2(T_{\lambda\mu\nu\omega}+T_{\lambda\nu\omega\mu}+T_{\lambda\omega\mu\nu})=0$。故固定 $T_{\lambda\mu\nu\omega}$ 的一指标，循环改变其他三指标并求和得 0。

(ii) $$\begin{aligned}T_{\lambda\mu\nu\omega}&=-T_{\mu\nu\lambda\omega}-T_{\nu\lambda\mu\omega}=(T_{\lambda\nu\omega\mu}+T_{\omega\nu\mu\lambda})-T_{\nu\lambda\mu\omega}\\&=T_{\nu\lambda\mu\omega}+T_{\nu\omega\lambda\mu}-T_{\nu\lambda\mu\omega}=T_{\nu\omega\lambda\mu}.\end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned}2u^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu\omega}&=u^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu\omega}+u^{\lambda\nu\mu}T_{\lambda\nu\mu\omega},\quad(\mu\leftrightarrow\nu)\\&=u^{\lambda\mu\nu}(T_{\lambda\mu\nu\omega}-T_{\lambda\nu\mu\omega})\quad(u\ \text{的反称性})\\&=u^{\lambda\mu\nu}(-T_{\mu\lambda\nu\omega}-T_{\lambda\nu\mu\omega})\\&=u^{\lambda\mu\nu}T_{\nu\mu\lambda\omega}\quad(T\ \text{的循环和})\\&=-u^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu\omega}.\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad 3u^{\lambda\mu\nu}T_{\lambda\mu\nu\omega}=0.$$

23. $b_{\lambda\mu}$，$b_{\lambda\mu\nu}$ 的对称性显然。为了证明它们是张量的分量研究其变换式。对 c也一样。

24. 设 $a_{\lambda\mu}x^{\lambda}x^{\mu}=0$ 对任意的 x^{λ} 成立。此式对 x^{α} 求偏导数得 $a_{\lambda\mu}\delta_{\alpha}{}^{\lambda}x^{\mu}+a_{\lambda\mu}x^{\lambda}\delta_{\alpha}{}^{\mu}=0$，$a_{\alpha\mu}x^{\mu}+a_{\lambda\alpha}x^{\lambda}=0$。再对 x^{β} 求偏导数得 $a_{\alpha\mu}\delta_{\beta}{}^{\mu}+a_{\lambda\alpha}\delta_{\beta}{}^{\lambda}=0$。由此得 $a_{\alpha\beta}+a_{\beta\alpha}=0$，对于 $a_{\lambda\mu\nu}$ 也一样。

25. 设$a^{\lambda\mu}$ 对称，$b_{\lambda\mu}$ 反称，则

$$a^{\lambda\mu}b_{\lambda\mu}=-a^{\lambda\mu}b_{\mu\lambda}=-a^{\mu\lambda}b_{\mu\lambda}=-a^{\lambda\mu}b_{\lambda\mu}.$$

故得 $a^{\lambda\mu}b_{\lambda\mu}=0$。上式最后的变形是由于交换字母 λ，μ。其次对于任意对称 $a^{\lambda\mu}$，设$a^{\lambda\mu}b_{\lambda\mu}=0$。特别对于 $a^{\lambda\mu}=x^{\lambda}x^{\mu}$，$x^{\lambda}x^{\mu}b_{\lambda\mu}=0$。因为 x^{λ} 任意，故由前题知 $b_{\lambda\mu}+b_{\mu\lambda}=0$。

26. 证明 $p=1$，$q=2$ 情况。定义 ϕ：$T_{2}{}^{1}\to T_{1}{}^{0}$ 为 $S=(S^{\lambda}{}_{\mu\nu})\to\phi(S)=(S^{\lambda}{}_{\lambda\nu})$，则 $\phi(S+T)=\phi(S)+\phi(T)$，$\phi(aS)=a\phi(S)$ 成立，故为线性映射。

27. 因 $T^{\mu\nu}$，U^{λ} 为张量的分量，故在基底的变换下

$$\overline{T}^{\mu\nu}=b_{\beta}{}^{\mu}b_{\gamma}{}^{\nu}T^{\beta\gamma},\qquad \overline{U}^{\lambda}=b_{\varepsilon}{}^{\lambda}U^{\varepsilon}.$$

因$\overline{S}^{\lambda}{}_{\mu\nu}\overline{T}^{\mu\nu}=\overline{U}^{\lambda}$，故

$$\overline{S}^{\lambda}{}_{\mu\nu}b_{\beta}{}^{\mu}b_{\gamma}{}^{\nu}T^{\beta\gamma}=b_{\varepsilon}{}^{\lambda}U^{\varepsilon}=b_{\varepsilon}{}^{\lambda}S^{\varepsilon}{}_{\beta\gamma}T^{\beta\gamma}.$$

令 $c^{\lambda}{}_{\beta\gamma}=\overline{S}^{\lambda}{}_{\mu\nu}b_{\beta}{}^{\mu}b_{\gamma}{}^{\nu}-b_{\varepsilon}{}^{\lambda}S^{\varepsilon}{}_{\beta\gamma}$，则 $c^{\lambda}{}_{\beta\gamma}T^{\beta\gamma}=0$ 对于任意对称张量 $T^{\beta\gamma}$ 成立。因此由第 25 题得 $c^{\lambda}{}_{\beta\gamma}+c^{\lambda}{}_{\gamma\beta}=0$，即

$$(\overline{S}^{\lambda}{}_{\mu\nu}+\overline{S}^{\lambda}{}_{\nu\mu})b_{\beta}{}^{\mu}b_{\gamma}{}^{\nu}-b_{\varepsilon}{}^{\lambda}(S^{\varepsilon}{}_{\beta\gamma}+S^{\varepsilon}{}_{\gamma\beta})=0$$

成立，从而 $S^{\lambda}{}_{\mu\nu}+S^{\lambda}{}_{\nu\mu}$ 是张量的分量。

$T^{\alpha\beta}$ 是反称的情况也一样。

28. 设$\{e_{\lambda}\}$,$\{f_{i}\}$分别为V,U的基底，再设 $\phi(e_{\lambda})=b_{\lambda}{}^{i}f_{i}$。设 $x(t)=x^{\lambda}(t)e_{\lambda}$，则

$$\phi\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)=\phi(\dot{x}^{\lambda}e_{\lambda})=\dot{x}^{\lambda}\phi(e_{\lambda}),$$

$$\frac{d}{dt}(\phi(x(t)))=\frac{d}{dt}(\phi(x^{\lambda}e_{\lambda}))$$

$$=\frac{d}{dt}(x^{\lambda}\phi(e_{\lambda}))=\frac{d}{dt}(x^{\lambda}b_{\lambda}{}^{i}f_{i})$$

$$= \frac{d(x^\lambda b_\lambda{}^i)}{dt} f_i = \dot{x}^\lambda b_\lambda{}^i f_i = \dot{x}^\lambda \phi(e_\lambda).$$

29. (i)⇨(ii) 显然。(ii)⇨(i) 是因为从

$$g(x+y, x+y) = g(x,x) + 2g(x,y) + g(y,y),$$

$$\overline{g}(x+y, x+y) = \overline{g}(x,x) + 2\overline{g}(x,y) + \overline{g}(y,y)$$

得$g(x,y) = \overline{g}(x,y)$。∴ $g = \overline{g}$。

30. 当 $x=0$ 时显然。当 $x \neq 0$ 时，设 $t \in \boldsymbol{R}$，令 $z = tx + y$，则

$$f(t) = \|z\|^2 = \langle tx+y, tx+y \rangle$$

$$= \|x\|^2 t^2 + 2\langle x,y \rangle t + \|y\|^2 \geqslant 0$$

是 t 的正定二次式，故判别式$\leqslant 0$。∴ $\langle x,y\rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0$。

31. $a_1 x_1 + \cdots + a_r x_r = 0$与 x_1 作内积，则

$$\langle x_1, a_1 x_1 + \cdots + a_r x_r \rangle = \langle x_1, 0 \rangle = 0$$

$$= \langle x_1, a_1 x_1 \rangle = a_1 \|x_1\|^2$$

∴ $a_1 = 0$。 同理$a_2 = \cdots = a_r = 0$。

32. 因 $\{e_\lambda\}$ 是标准正交基，故 $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$。于是得

$$\langle \overline{e}_\lambda, \overline{e}_\mu \rangle = \langle a_\lambda{}^\alpha e_\alpha, a_\mu{}^\beta e_\beta \rangle = a_\lambda{}^\alpha a_\mu{}^\beta \delta_{\alpha\beta} = \sum a_\lambda{}^\alpha a_\mu{}^\alpha.$$

可见 $\{\overline{e}_\lambda\}$ 为标准正交基的条件 $\langle \overline{e}_\lambda, \overline{e}_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$，与矩阵$A$为正交矩阵的条件 $\sum a_\lambda{}^\alpha a_\mu{}^\alpha = \delta_{\lambda\mu}$ 等价。

33. 在基底变换下，反变张量 $T^{\lambda\mu}$ 的变换规律是 $a_\lambda{}^\alpha a_\mu{}^\beta \overline{T}^{\lambda\mu} = T^{\alpha\beta}$。根据前题，在标准正交基的变换下，$A$ 是正交矩阵。这时 $a_\lambda{}^\alpha a_\mu{}^\beta \delta^{\lambda\mu} = \sum a_\lambda{}^\alpha a_\lambda{}^\beta = \delta^{\alpha\beta}$，故 $\overline{T}^{\lambda\mu} = T^{\lambda\mu} = \delta^{\lambda\mu}$ 满足变换规律。因此关于标准正交基恒存在以 $\delta^{\lambda\mu}$ 为分量的张量。又关于其他基底$e_\lambda = c_\lambda{}^\mu e_\mu'$的分量是 $T'^{\lambda\mu} = c_\alpha{}^\lambda c_\beta{}^\mu \delta^{\alpha\beta} = \sum c_\alpha{}^\lambda c_\alpha{}^\mu$。

34. 根据 $g(e_\lambda, e_\mu) = g_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}$ 定义 g，则 e_1, e_2 为标准正交基。为求出 g 关于$\{\overline{e}_\lambda\}$的分量，求坐标变换 $\overline{e}_\lambda = a_\lambda{}^\mu e_\mu$，根据假设

$$\overline{e}_1 = e_1, \quad \overline{e}_2 = (0,1) = -(1,0) + (1,1) = -e_1 + e_2.$$

由此得 $a_1{}^1 = 1$，$a_1{}^2 = 0$，$a_2{}^1 = -1$，$a_2{}^2 = 1$。故由 $\overline{g}_{\lambda\mu} = a_\lambda{}^\alpha a_\mu{}^\beta g_{\alpha\beta}$ 得 $\overline{g}_{11} = 1$，$\overline{g}_{12} = \overline{g}_{21} = -1$，$\overline{g}_{22} = 1$。

35. 取 $\overline{g}_{\lambda\mu} = a_\lambda{}^\alpha a_\mu{}^\beta g_{\alpha\beta}$ 两边的行列式。

36. 设 $\overline{e}_\lambda = a_\lambda{}^\mu e_\mu$ 为标准正交基，则 $\overline{g}_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}$。因 $A = (a_\lambda{}^\mu)$ 正则，故存在逆矩阵 $B = A^{-1} = (b_\lambda{}^\mu)$，$B$ 也正则。从 $g_{\lambda\mu} = b_\lambda{}^\alpha b_\mu{}^\beta \overline{g}_{\alpha\beta}$ 得 $\mathrm{g} = (\det B)^2 \overline{\mathrm{g}}$。然因 $\overline{\mathrm{g}} = 1$，故 $\mathrm{g} = (\det B)^2 > 0$。

37. 考虑关于标准正交基的分量

$$\|T\|^2 = \delta_{\lambda\alpha}\delta_{\mu\beta}T^{\lambda\mu}T^{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\alpha}(T^{\lambda\alpha})^2 \geqslant 0.$$

等号只有在 $T^{\lambda\alpha} = 0$，即 T 是零张量时成立。然因 $\|T\|^2$ 是数量，故其值与基底的取法无关。因此关于任意基底也正确。

38. 根据 $\delta_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}^{1 \cdots n}$ 的定义（§3 例题3）知，$\delta_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}^{1 \cdots n}$ 等于排列 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的符号，即

$$\delta_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}^{1 \cdots n} = \begin{cases} 1, & \text{当 } \lambda_1, \cdots, \lambda_n \text{ 是 } 1, \cdots, n \text{ 的偶排列时,} \\ 0, & \text{当 } \lambda_1, \cdots, \lambda_n \text{ 中有相同者时,} \\ -1, & \text{当 } \lambda_1, \cdots, \lambda_n \text{ 是 } 1, \cdots, n \text{ 的奇排列时.} \end{cases}$$

$\varepsilon_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = \delta_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}^{1 \cdots n} \sqrt{\mathrm{g}}$ 的反称性显然，其次证明张量性．由行列式的性质可见

$$\delta_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}^{1 \cdots n} a_{\lambda_1}^{\alpha_1} \cdots a_{\lambda_n}^{\alpha_n} = \delta_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}^{1 \cdots n} \det A$$

从而

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} a_{\lambda_1}^{\alpha_1} \cdots a_{\lambda_n}^{\alpha_n} &= \sqrt{\mathrm{g}} \det A \, \delta_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}^{1 \cdots n} \\ &= \sqrt{\overline{\mathrm{g}}} \, \delta_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}^{1 \cdots n} \qquad \text{（参照 35 题）} \\ &= \overline{\varepsilon}_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}. \end{aligned}$$

39. 选择 $e_3, \cdots, e_n$，$\overline{e}_3, \cdots, \overline{e}_n$ 使得 $e_1, \cdots, e_n$；$\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_n$ 分别为标准正交基。$\{e_\lambda\} \to \{\overline{e}_\lambda\}$ 的正交变换就是所求。

习题二解答 （pp.28～33）

1. $M^n \times N^m$ 根据直积拓扑成连通豪斯道夫空间，故证出定义5.1 的条件(i)～(iii)成立即可。

（i） 显然 $\{U_i \times V_j\}$ 是开复盖。

（ii） 令 $\pi_{ij} = \theta_i \times \omega_j$。$\pi_{ij}: U_i \times V_j \to O_i \times O_j'$ 显然是一对一，而

且 π_{ij}, π_{ij}^{-1} 都连续。

(iii) 设$(p,q)\in(U_i\times V_j)\cap(U_k\times V_l)$,则 $p\in U_i\cap U_k$。$q\in V_j\cap V_l$。又设 $\pi_{ij}(p,q)=(\theta_i(p),\omega_j(q))$的坐标为 $z^A, A=1,\cdots,n+m$, 则 $z^\lambda((p,q))=x^\lambda(\theta_i(p))=x^\lambda(p)$。$z^{n+a}((p,q))=y^a(\omega_j(q))=y^a(q)$。同理 $\pi_{kl}((p,q))$ 的坐标 z'^A 是 $z'^\lambda=x'^\lambda$, $z'^{n+a}=y'^a$。故坐标变换$\{z^A\}\to\{z'^A\}$变成

$$x'^\lambda=x'^\lambda(x),\quad y'^a=y'^a(y)$$

可见，是 C^∞ 级。

2. $P_n(k)$ 是连通豪斯道夫空间。其次讨论定义 5.1 的条件 (i)～(iii)。原样不变地使用 $S^n(k)$ 的决定邻域系 $U_i^\pm$, $i=1,\cdots,n+1$, 则(i), (ii)显然。至于(iii), $U_i^\pm\cap U_j^\pm(i\neq j)$ 的坐标变换是 C^∞ 级与§5例1的 $S^n(k)$ 的情况一样证明。再来讨论 $i=j$ 的情况。因为 U_i^+ 与 U_i^- 在 $P^n(k)$是相同的点集，故以 U_i 记之。例如对于 U_{n+1} 有二坐标系

$$\theta^+_{n+1}:U^+_{n+1}=U_{n+1}\to O_{n+1},\quad \theta^-_{n+1}:U^-_{n+1}=U_{n+1}\to O_{n+1},$$

因$U_{n+1}\cap U_{n+1}\neq\varnothing$，故有必要证明它们之间的坐标变换是 C^∞ 级的。设 $\overline{p}$ 为 p 的直径对点，在 $P_n(k)$里 $p=\overline{p}$，在 $\theta^+_{n+1}(p)=(x^1(p),\cdots,x^n(p))$ 与 $\theta^-_{n+1}(p)=\theta^-_{n+1}(\overline{p})=x'^1(\overline{p}),\cdots,x'^n(\overline{p}))$ 之间有 $x'^\lambda=-x^\lambda$ 的关系。因此仍然是 C^∞ 级的。

3. 固定 C^0 级流形 M^n 的任意一点 p_0，可用连续曲线与 p_0 连结起来的点全体所作集设为 A。以下证明 A是M^n的开集。包含 $q\in A$ 的连通坐标邻域设为$U(q)$，则$U(q)$与 R^n 的连通开集同胚，故$U(q)$的点全与 q 可用连续曲线连结。故$U(q)$的点经过 q 可与 p_0 连结。即对于A的任意点 q, q 的适当邻域 $U(q)$ 包含于A。因此 A为开集。再设有不属于A的 M^n 的点，则它们全体所作的集 B 同理也是开集（任意个开集之和是开集）而且 $A\cup B=M^n$, $A\cap B=\varnothing$,故与 M^n 的连通性矛盾。因此 $B=\varnothing$, $M^n=A$, M^n 是弧连通。

注意。一般说来，弧连通的拓扑空间是连通的。

4. 设 $X=(\xi^\lambda)$，则

$$X(af+bg)=\xi^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(af+bg)$$

$$=a\xi^\lambda\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}+b\xi^\lambda\frac{\partial g}{\partial x^\lambda}=aXf+bXg,$$

$$X(fg)=\xi^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(fg)=\xi^\lambda\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}g+\xi^\lambda f\frac{\partial g}{\partial x^\lambda}$$

$$=(Xf)g+fXg.$$

5. 设 $p\in M^n$，$q\in N^m$，则对于 $X\in T_p(M)$，$Y\in T_q(N)$，存在 $X=\dot{c}_1(0)$，$Y=\dot{c}_2(0)$ 的曲线 $c_1\in \boldsymbol{C}(p)$，$c_2\in\boldsymbol{C}(q)$。考虑 $c(t)=(c_1(t),\ c_2(t))$，它是 $M^n\times N^m$ 的曲线而且 $c(0)=(p,q)$，故 $\dot{c}(0)\in T_{(p,q)}$ 唯一决定。反之对于 $T_{(p,q)}$ 的元 Z，存在 $M^n\times N^m$ 的曲线 $c\in \boldsymbol{C}((p,q))$ 满足 $\dot{c}(0)=Z$.因为 c 可写做$c(t)=(c_1(t),c_2(t))$的形状，$c_1\in\boldsymbol{C}(p)$,$c_2\in\boldsymbol{C}(q)$,所以 $\dot{c}_1(0)\in T_p$，$\dot{c}_2(0)\in T_q$ 唯一地决定。这样的对应 $(\dot{c}_1(0),\ \dot{c}_2(0))\leftrightarrow\dot{c}(0)$是同构对应(参照习题一第 6 题)。

6. (i) π: $TM\to M^n$ 是 $\{x^\lambda,y^\lambda\}\to x^\lambda$ 的对应，所以是 C^∞ 级的。

(ii) 向量场X在各点 p 对应以 $T_p(M)\subset TM$ 的元 $X(p)$，故 $\pi(X(p))=p$。即将 X 看做映射，则 $\pi\circ X=I$。使用坐标来考虑，因 $X=\xi^\lambda(x)\partial/\partial x^\lambda$ 是对应 $\{x^\lambda\}\to\{x^\lambda,\xi^\lambda(x)\}$，故为 C^∞ 级。

7. 关于其他坐标系设 c 为 $x'^\lambda=x'^\lambda(t)$，则

$$\frac{dx'^\lambda}{dt}=\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\ \frac{dx^\mu}{dt},$$

$$\frac{d^2x'^\lambda}{dt^2}=\frac{\partial^2x'^\lambda}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\ \frac{dx^\mu}{dt}\ \frac{dx^\nu}{dt}+\frac{dx'^\lambda}{dx^\mu}\ \frac{d^2x^\mu}{dt^2}.$$

式中右边第一项一般并不是 0，故 d^2x^λ/dt^2不满足向量的变换规律。

注意 因此，在 $p\in U\cap U'$

$$\frac{d^2x'^\lambda}{dt^2}\left(\frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\right)_p,\quad \frac{d^2x^\lambda}{dt^2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_p$$

不表示 $T_p(M)$ 的相同向量。

8. 对于各 λ，x^λ 在 U 上是数量函数，故可用 $X=\xi^\mu\partial/\partial x^\mu$ 作用 x^λ，得

$$Xx^\lambda=\xi^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}x^\lambda=\xi^\mu\delta_\mu{}^\lambda=\xi^\lambda$$

另外，

$$\langle X,dx^\lambda\rangle=\langle\xi^\mu\partial/\partial x^\mu,dx^\lambda\rangle=\xi^\mu\langle\partial/\partial x^\mu,dx^\lambda\rangle$$
$$=\xi^\mu\delta_\mu{}^\lambda=\xi^\lambda.$$

9. $u'_\lambda=\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}u_\alpha$ 对 x'^μ 求偏导数可得下式。

$$\frac{\partial u'_\lambda}{\partial x'^\mu}=\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial x'^\mu\partial x'^\lambda}u_\alpha+\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}.$$

再根据此式。

10. 注意 $\dfrac{\partial x'^i}{\partial x^a}=\dfrac{\partial x^b}{\partial x'^j}=0$，$\dfrac{\partial x'^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^k}{\partial x'^j}=\delta_j{}^i$ 等说明 $h'_\mu{}^\lambda$

$$=\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}h_\beta{}^\alpha.$$

11. (i)，(ii) 由 Φ 的定义显然。使用坐标计算 (iii)。例如，设 T 为(1,2)阶张量，设 ϕ：$\{x^\lambda\}\to\{x'^\lambda\}$，则 $S=\Phi(T)$ 的分量由

$$S_{\lambda\mu}{}^\nu=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}T_{\alpha\beta}{}^\gamma$$

而定。令 $\lambda=\nu$ 并求和得

$$S_{\lambda\mu}{}^\lambda=\delta_\gamma{}^\alpha\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}T_{\alpha\beta}{}^\gamma=\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}T_{\alpha\beta}{}^\alpha.$$

此式说明将 T 缩短再用 Φ 映射而得的量（右边）等于将 $S=\Phi(T)$ 缩短而得的量。

12. 因为曲线 c 是从微分流形 R 到 M^n 中的映射，所以在它的微分映射 c_* 下，在自然标形 d/dt，$\partial/\partial x^\lambda$ 之间有如下关系（参照定理 ,.4)。

$$c_*\left(\frac{d}{dt}\right)=\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}=\dot{c}$$

13. 根据 $\theta_*=\psi_*\circ\phi_*$，$(\theta^{-1})^*=(\psi^{-1})^*\circ(\phi^{-1})^*$以及 Φ 的定义.

14. 因 $0\in T_p(M)$做为 TM 的元，其坐标为 $\{x^\lambda,0\}$，故 $i(M)$：$x^A=x^A(x^\lambda)$变成 $x^\lambda=x^\lambda$，$y^\lambda=0$。从而矩阵 $(B_\lambda{}^A)$ 的秩为 n。

15. 因为 $\lambda(0)=X$，所以 λ 是通过 X 的 $T_p(M)$ 的曲线。于是 $\dot\lambda(0)=\mathfrak{J}_X(Y)\in T_X(T_p(M))$．现在设 $X=\xi^\lambda(\partial/\partial x^\lambda)_p$，$Y=\eta^\lambda(\partial/\partial x^\lambda)_p$，那么曲线 λ 关于 $T_p(M)$ 的坐标系 $\{y^\lambda\}$ 可写做 $y^\lambda=\xi^\lambda+t\eta^\lambda$。故得

$$\mathfrak{J}_X(Y)=\dot\lambda(0)=\left(\frac{dy^\lambda}{dt}\frac{\partial}{\partial y^\lambda}\right)_{t=0}=\eta^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda}\right)_X$$

由此形状可见 $\mathfrak{J}_X$ 是同构映射.

16. 设 ϕ：$N^m\to M^n$ 为 $x'^\lambda=x'^\lambda(x^a)$，又设 $\{x^A\}=\{x^a,y^a\}$，$\{x'^B\}=\{x'^\lambda,y'^\lambda\}$ 分别为 TN，TM 的决定邻域系的坐标。因为

$$\phi_*\left(y^a\frac{\partial}{\partial x^a}\right)=y^a\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x'^\lambda}$$

所以 ϕ_* 由

$$x'^\lambda=x'^\lambda(x),\qquad y'^\lambda=\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^a}y^a$$

而定，因此 ϕ_* 是唯一对应又是 C^∞ 级，从而决定 $TN\to TM$ 的映射。再设 $X\in T_p(N)$，则从$\phi_*(X)\in T_{\phi(p)}(M)$，$\pi_N(X)=p$ 得 $\pi_M\circ\phi_*(X)=\phi(p)=\phi\circ\pi_N(X)$。

17. 略。

18. 因为 $[X,Y]=\left(\xi^\alpha\frac{\partial\eta^\omega}{\partial x^\alpha}-\eta^\alpha\frac{\partial\xi^\omega}{\partial x^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x^\omega}$，所以固定 λ，μ 并将 $\xi^a=\delta_\lambda{}^a$，$\eta^a=\delta_\mu{}^a$ 代入之。

19. 略。

20. 使用 X,Y,Z 的分量来计算。

21. 在 $\{\phi_t\}$ 下恒将积分曲线变为积分曲线与向量场Y 在 Φ_t 下不

变等价。然而根据黎曼几何的 $p.49$ 知

$$\mathcal{L}_X Y=0 \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t Y\right)_{t=0}=0 \Longleftrightarrow \Phi_t Y=Y.$$

22. $\mathcal{L}_X \delta_\mu{}^\lambda=\xi^\alpha \frac{\partial \delta_\mu{}^\lambda}{\partial x^\alpha}+\delta_\alpha{}^\lambda \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}-\delta_\mu{}^\alpha \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\alpha}=0.$

23. (i)从 Φ_t 的线性性质可得。微分 $\Phi_t(ST)=\Phi_t(S)\Phi_t(T)$ 可得(ii)。

24. 使用分量计算。

25. 例如对于(1,1)阶张量 S，将 $\mathcal{L}_{[X,Y]}S=\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y S-\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X S$ 使用分量计算之。

26. 运用计算。

27. 将前题(3)的 h 以 $h+k$ 代替之，展开右边。

28. 因为 $\mathcal{L}_X hY=(\mathcal{L}_X h)Y+h\mathcal{L}_X Y$，即

$$\mathcal{L}_X(h_\mu{}^\lambda \eta^\mu)=(\mathcal{L}_X h_\mu{}^\lambda)\eta^\mu+h_\mu{}^\lambda \mathcal{L}_X \eta^\mu$$

成立，所以

$$[X,hY]=(\mathcal{L}_X h)Y+h[X,Y]. \tag{1}$$

以 h 作用之得

$$h[X,hY]=h(\mathcal{L}_X h)Y+h^2[X,Y] \tag{2}$$

其次在(1)里以 hX 代 X 得

$$[hX,hY]=(\mathcal{L}_{hX}h)Y+h[hX,Y] \tag{3}$$

(3)－(2)即得。

29. 仿射坐标系 $\{x'^\lambda\}$ 是直交坐标系 $\{x^\lambda\}$ 经

$$x'^\lambda=a_\mu{}^\lambda x^\mu+b^\lambda, \qquad \det(a_\mu{}^\lambda)\neq 0$$

而得的，故令 $(a_\mu{}^\lambda)^{-1}=(c_\mu{}^\lambda)$，则得

$$g'_{\lambda\mu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}g_{\alpha\beta}=c_\lambda{}^\alpha c_\mu{}^\beta \delta_{\alpha\beta}=\sum_\alpha c_\lambda{}^\alpha c_\mu{}^\alpha \quad (\text{常数}).$$

30. 设 $g'_{\lambda\mu}$ 是关于任意坐标系 $\{x'^\lambda\}$，g 的分量。在 p 考虑 $g'_{\lambda\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}=g_{\alpha\beta}$，令 $a_\alpha{}^\lambda=\left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\right)_p$。只要证出存在坐标系 $\{x^\lambda\}$

满足

$$g'_{\lambda\mu}(p)a_\alpha{}^\lambda a_\beta{}^\mu = g_{\alpha\beta}(p) = \delta_{\alpha\beta} \qquad (1)$$

即可。设矩阵 $A=(a_\mu{}^\lambda)$ 的逆矩阵为$(c_\mu{}^\lambda)$，(1)的两边与 $c_\rho{}^\alpha c_\sigma{}^\beta$ 作积和可得与(1)等价的

$$g'_{\rho\sigma}(p) = \sum_\alpha c_\rho{}^\alpha c_\sigma{}^\alpha. \qquad (2)$$

故如存在满足(2)的正则矩阵$(c_\mu{}^\lambda)$，问题就解决。原因是从(2)可得(1)，根据 $x'^\lambda = a_\mu{}^\lambda x^\mu$ 决定的坐标系$\{x^\lambda\}$就是所求的。再者，在$T_p(M)$任取标准正交基 $\{X_{(\rho)}\}$，设其分量为 $c_\rho{}^\alpha$，则由定理 4.3 知(2)成立。故在 p 存在坐标系满足 $g_{\lambda\mu}(p)=\delta_{\lambda\mu}$。

31. 在坐标变换 $\bar{x}^\lambda = \bar{x}^\lambda(x)$下

$$\bar{g}_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\mu}g_{\alpha\beta},$$

故求两边的行列式则得 $\bar{g}=(\Delta_{x,\bar{x}})^2 g$，即 g 为权 2 的相对数量函数。同理对于 $g'_{\lambda\mu}$ 也可得到 $\bar{g}'=(\Delta_{x,\bar{x}})^2 g'$，因此 $\bar{g}/\bar{g}'=g/g'$。g/g' 与坐标系的选法无关而决定其值，故是数量函数。

32. 在 $U^\pm_{n+1}$ 里 $\{x^a\}$，$a=1,\cdots,n$ 为局部坐标；做为 E^{n+1} 的曲面，$S^n(k)$ 由

$$x^a = x^a, \qquad x^{n+1} = x^{n+1}(x^a)$$

的形状给定。令 $u^a = x^a$ 计算 $B_a{}^\lambda = \partial x^\lambda/\partial u^a$，则

$$(B_a{}^\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^b}{\partial u^a} \\ \dfrac{\partial x^{n+1}}{\partial u^a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_a{}^b \\ -\dfrac{x^a}{x^{n+1}} \end{pmatrix}$$

其中，$B_a{}^{n+1}$ 是从$(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=k^2$ 对 x^a 求偏导数而得之式

$$2x^a + 2x^{n+1}B_a{}^{n+1} = 0$$

求得，

$$\therefore \quad \bar{g}_{ab} = \sum B_a{}^\lambda B_b{}^\lambda = \sum_{c=1}^{n} B_a{}^c B_b{}^c + B_a{}^{n+1}B_b{}^{n+1}$$

$$= \delta_{ab} + \frac{x^a x^b}{(x^{n+1})^2}$$

注意．在上式左右两边，指标的上下位置不同。在张量表达式中不发生这类事情。但象此式只在特定的坐标系成立的式子中有时是这样。

33． $(dx^1)^2 + \cdots + (dx^4)^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2$．

习题三解答（pp.50～59）

1． 将

$$\overline{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial \overline{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu \partial \overline{x}^\nu} + \frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \overline{x}^\nu} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \right) \qquad (1)$$

代入

$$\Gamma'^{\rho}_{\sigma\tau} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial \overline{x}^\lambda}\left(\frac{\partial^2 \overline{x}^\lambda}{\partial x'^\sigma \partial x'^\tau} + \frac{\partial \overline{x}^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial \overline{x}^\nu}{\partial x'^\tau} \overline{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} \right)$$

消去 $\overline{x}$，$\overline{\Gamma}$ 并加以整理。

2． 前题（1）的变换式对 $\overline{\Gamma}_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} = \Gamma_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma} = 0$ 成立的条件是 $\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu \partial \overline{x}^\nu} = 0$。解之得 $x^\alpha = a_\mu{}^\alpha \overline{x}^\mu + b^\alpha$。

3． 详细写出 $\nabla_c T_{\lambda\mu}$ 可见。　　　**4**． 略．

5． 设 Γ 为仿射联络，在座标变换 $\{x^\lambda\} \to \{x'^\lambda\}$ 下有

$$\Gamma'_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma} \right). \qquad (1)$$

又张量 T 的变换式是

$$T'_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu} T_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma} \qquad (2)$$

(1)，(2)边边相加可见 $\overline{\Gamma}$ 满足与(1)相同形状的变换式。因此 $\overline{\Gamma}$ 也是仿射联络。反之，如 Γ，$\overline{\Gamma}$ 是仿射联络，则两者的坐标变换式边边相减可得 $T = \overline{\Gamma} - \Gamma$ 的变换式（2），故 T 是张量。

6. 前半．将 $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}=\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ 代入前题(1)，由Γ的变换式可见$\bar{\Gamma}$也作仿射联络的变换．后半通过计算．

7. 计算．

8. 首先，因为 $\xi_{\lambda}{}^{(i)}$ 是共变向量的分量，所以

$$\xi'_{\lambda}{}^{(i)}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}}\xi_{\alpha}{}^{(i)}. \tag{1}$$

再来说明在坐标变换 $\{x^{\lambda}\}\to\{x'^{\lambda}\}$ 下，Γ 满足仿射联络系数的变换式．为此，将(1)与 $\xi'_{(i)}{}^{\lambda}=\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\xi_{(i)}{}^{\alpha}$代入

$$\Gamma'{}_{\mu\mu}^{\lambda}=\xi'_{(i)}{}^{\lambda}\frac{\partial\xi'_{\nu}{}^{(i)}}{\partial x'^{\mu}}$$

并计算之．

9. 假设存在 Γ 使得全体 $X_{(i)}$ 平行，则

$$\nabla_{\lambda}\xi_{(i)}{}^{\mu}=\frac{\partial\xi_{(i)}{}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}+\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}\xi_{(i)}{}^{\nu}=0, i=1,\cdots,n,$$

成立．乘以$\xi_{\omega}{}^{(i)}$ 并关于 i 求和，则

$$\Gamma_{\lambda\omega}^{\mu}=-\xi_{\omega}{}^{(i)}\frac{\partial\xi_{(i)}{}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}.$$

然因 $\xi_{\omega}{}^{(i)}\xi_{(i)}{}^{\mu}=\delta_{\omega}^{\mu}$ 对 x^{λ} 求偏导数可得

$$\xi_{\omega}{}^{(i)}\frac{\partial\xi_{(i)}{}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}=-\xi_{(i)}{}^{\mu}\frac{\partial\xi_{\omega}{}^{(i)}}{\partial x^{\lambda}}$$

故得

$$\Gamma_{\lambda\omega}^{\mu}=\xi_{(i)}{}^{\mu}\frac{\partial\xi_{\omega}{}^{(i)}}{\partial x^{\lambda}}$$

正好是前题的 Γ．

10. 计算右边．

11. 计算右边．

12. (i),(ii),(iii) 根据微分方程

$$\frac{d\xi^{\lambda}}{dt}+\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\xi^{\nu}=0 \qquad (1)$$

的线性性质与解的唯一性。(iv) 是因为，根据 (i),(ii),(iii) 知 c 是一对一在上线性映射。

注意。因为 (1) 与 $\nabla_{\dot{c}}X=0$ 等价，所以有与局部坐标系的选法无关的意义。因此，既使 c 不在一个坐标邻域之中，将微分方程的解连起来即可。

13. (i) 证明 H_p 满足群的公理系统：(a) $c_3\circ(c_2\circ c_1)=(c_3\circ c_2)\circ c_1$ (b) 存在 c_0 使得 $c\circ c_0=c_0\circ c=c$. (c) 存在逆元 c^{-1} 使得 $c\circ c^{-1}=c^{-1}\circ c==c_0$。(a) 根据前题 (1)中微分方程的解的唯一性。(b) 取 c_0 为长度是 0 的曲线 (c) 取 c^{-1} 为与 c 反向的曲线。

(ii) 任意取定一条连结 p, q 的曲线 γ。对于 $c'\in H_q$, $\gamma^{-1}\circ c'\circ\gamma$ 是通过 p 的闭曲线($p\to q\to q\to p$)，故 $\gamma^{-1}\circ c'\circ\gamma\in H_p$。因为 $c'\to\gamma^{-1}\circ c'\circ\gamma$ 的对应 ϕ: $H_q\to H_p$ 存在逆对应 $c\to\gamma\circ c\circ\gamma^{-1}$，所以是在上一一对应。又因 $\phi(c_1')\circ\phi(c_2')=(\gamma^{-1}\circ c_1'\circ\gamma)\circ(\gamma^{-1}\circ c_2'\circ\gamma)=\gamma^{-1}\circ c_1'\circ c_2'\circ\gamma=\phi(c_1'\circ c_2')$ 成立，故为同态，从而 ϕ 是同构映射。

14. 因为坐标变换是 $x'^i=x'^i(x^j)$, $x'^a=x'^a(x^b)$ 的形状，运用此式证明 $L_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$ 满足仿射联络系数的变换式。

15. 首先因 $K=H^{-1}$，故

$$h^{\lambda\alpha}k_{\alpha\mu}=\delta_{\mu}{}^{\lambda},\qquad k_{\lambda\alpha}h^{\alpha\mu}=\delta_{\lambda}{}^{\mu}.$$

(i) 计算 $K(\nabla_X H(u))$ 的分量得

$$k_{\lambda\alpha}\xi^{\beta}\nabla_{\beta}(h^{\alpha\varepsilon}u_{\varepsilon})=\xi^{\beta}\left(\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial x^{\beta}}-\overline{\Gamma}_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\lambda}u_{\varepsilon}\right)$$

式中令

$$\overline{\Gamma}_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\lambda}=-k_{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial h^{\alpha\varepsilon}}{\partial x^{\beta}}+\Gamma_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma}h^{\gamma\varepsilon}\right)$$

整理之得

$$\overline{\Gamma}_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\lambda}=\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\lambda}-(\nabla_{\beta}h^{\alpha\varepsilon})k_{\lambda\alpha}$$

因为 $-(\nabla_{\beta}h^{\alpha\varepsilon})k_{\lambda\alpha}$ 是(1,2)阶张量，所以 $\overline{\Gamma}$ 也是仿射联络。

(ii) 根据计算得 $\overline{\nabla}_\nu h^{\lambda\mu} = -(\nabla_\nu h^{\alpha\lambda}) k_{\varepsilon\alpha} h^{\varepsilon\mu}$。

(iii) 设H对称，则K也对称，这时

$$k_{\varepsilon\alpha} h^{\varepsilon\mu} = h^{\mu\varepsilon} k_{\varepsilon\alpha} = \delta_\alpha{}^\mu$$

故

$$\overline{\nabla}_\nu h^{\lambda\mu} = -\nabla_\nu h^{\mu\lambda} = -\nabla_\nu h^{\lambda\mu}$$

(iv) 与§11 例题 4 一样。

16. (i) 在§11例题5(ii)里令 $y^\lambda = \xi^\lambda(x(t))$。

(ii) 在(i)里设 $\xi^\lambda = \dot{x}^\lambda$。

(iii) 令 $f_\lambda{}^\alpha = -\Gamma_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\varepsilon} y^\varepsilon$，则 $f_\lambda{}^\alpha$ 是 TM 的函数。

$$[B_{(\lambda)}, B_{(\mu)}] = \left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + f_\lambda{}^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha},\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} + f_\mu{}^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda},\ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right] + \left[f_\lambda{}^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha},\ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right]$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda},\ f_\mu{}^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right] + \left[f_\lambda{}^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha},\ f_\mu{}^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right]$$

然因

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda},\ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right] = 0,\quad \left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda},\ \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right] = 0,\quad \left[\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\ \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right] = 0$$

故

$$[B_{(\lambda)}, B_{(\mu)}] = \left(-\frac{\partial f_\lambda{}^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f_\mu{}^\alpha}{\partial x^\lambda}\right.$$

$$\left. - f_\mu{}^\beta \frac{\partial f_\lambda{}^\alpha}{\partial y^\beta} + f_\lambda{}^\beta \frac{\partial f_\mu{}^\alpha}{\partial y^\beta}\right) \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

将 $f_\lambda{}^\alpha = -\Gamma_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\varepsilon} y^\varepsilon$ 代入之得

$$[B_{(\lambda)}, B_{(\mu)}] = K_{\mu\lambda\varepsilon}{}^\alpha y^\varepsilon \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

故对于任意的 x，y，$[B_{(\lambda)}, B_{(\mu)}] = 0$ 成立的条件是 $K_{\mu\lambda\varepsilon}{}^\alpha = 0$。

17. 在 $\nabla_{\dot{c}}(g_{\lambda\mu}\xi^\lambda\xi^\mu) = (\nabla_{\dot{c}} g_{\lambda\mu})\xi^\lambda\xi^\mu + 2g_{\lambda\mu}\xi^\lambda \nabla_{\dot{c}}\xi^\mu$ 里令 $\nabla_{\dot{c}}\xi^\lambda = 0$，则得 Γ 为度量联络 $(\nabla_{\dot{c}} g = 0)$ 的充要条件 (i)。(i)⇒(ii) 根据 $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y\rangle + \|Y\|^2$。(ii)⇒(i) 显然。

18. (i)因为 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}=0$，所以道路是 $\ddot{x}^{\lambda}=0$ 的解。解之得 $x^{\lambda}=a^{\lambda}t+b^{\lambda}$，故为直线。

(ii) 因为 E^3 的度量张量为 $\delta_{\mu\nu}$，所以

$$\nabla_{\lambda}\delta_{\mu\nu}=\frac{\partial\delta_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}-\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha}\delta_{\alpha\nu}-\Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}\delta_{\mu\alpha}=-\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}-\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}$$

故若在 λ,μ,ν 中有相等的，则 $\nabla_{\lambda}\delta_{\mu\nu}=0$。再根据

$$\nabla_1\delta_{23}=-\Gamma_{12}^{3}-\Gamma_{13}^{2}=-\Gamma_{12}^{3}+\Gamma_{31}^{2}=-1+1=0$$

等可见总是 $\nabla_{\lambda}\delta_{\mu\nu}=0$。

(iii) 因为 $2S_{\mu\nu}{}^{\lambda}=\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}-\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}=2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$，所以 $S(X,Y)$ 的分量 ζ^{λ} 是 $\zeta^{\lambda}=S_{\mu\nu}{}^{\lambda}\xi^{\mu}\eta^{\nu}=\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\xi^{\mu}\eta^{\nu}$。故得

$$\zeta^1=\Gamma_{\mu\nu}^{1}\xi^{\mu}\eta^{\nu}=\Gamma_{23}^{1}\xi^2\eta^3+\Gamma_{32}^{1}\xi^3\eta^2=\xi^2\eta^3-\xi^3\eta^2.$$

同理得

$$\zeta^1=\begin{vmatrix}\xi^2 & \eta^2\\ \xi^3 & \eta^3\end{vmatrix},\quad \zeta^2=\begin{vmatrix}\xi^3 & \eta^3\\ \xi^1 & \eta^1\end{vmatrix},\quad \zeta^3=\begin{vmatrix}\xi^1 & \eta^1\\ \xi^2 & \eta^2\end{vmatrix}$$

故 $S(X,Y)=X\times Y$。

19. (i) 因为 $\langle Y,Z\rangle$ 是数量，所以

$$X\langle Y,Z\rangle=\xi^{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\langle Y,Z\rangle=\xi^{\lambda}\nabla_{\lambda}\langle Y,Z\rangle$$
$$=\nabla_X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle.$$

(ii) 在§13 例题 3 (1)里 $S(X,Y)=0$。

(iii) 根据(i),(ii)得

$$X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle$$
$$=\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_ZX+[X,Z]\rangle$$

循环交换 $X\to Y\to Z\to X$，再计算(iii)的右边。

20. $$\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}'=\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial^2x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}+\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{Bmatrix}\right)$$

令 $\lambda=\mu$ 并求和得

$$\begin{Bmatrix}\lambda\\ \lambda\nu\end{Bmatrix}'=\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \alpha\gamma\end{Bmatrix}+\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\lambda}}$$

然而根据§9 例题2的（5），最后项变成下式。

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}}\right)=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial x'^{\nu}}=\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\log|\Delta|.$$

别证。在坐标变换下 $g=\det(g_{\lambda\mu})$ 变为 $g'=\Delta^2 g$。由此得

$$\frac{\partial g'}{\partial x'^{\nu}}=2\Delta\frac{\partial \Delta}{\partial x'^{\nu}}g+\Delta^2\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}}.$$

两边除以 $2g'=2\Delta^2 g$ 并使用下式。

$$\left\{ {\lambda \atop \lambda\nu} \right\}'=\frac{1}{2g'}\frac{\partial g'}{\partial x'^{\nu}}\quad(\S 12\text{例题 }1)$$

21. 首先用归纳法证明下列行列式的公式。

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+b_1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & 1+b_2 & \cdots\cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots\cdots & 1 & 1+b_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\frac{1}{b_1}+\cdots+\frac{1}{b_n}\right)b_1\cdots b_n. \tag{1}$$

当 $n=1$ 时得 $1+b_1=\left(1+\frac{1}{b_1}\right)b_1$，结论正确。设 n 时正确，证明 $n+1$ 时也正确。将

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1+b_1 & \cdots\cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots\cdots & 1+b_{n+1} \end{vmatrix}$$

沿第 $n+1$ 行展开得

$$D_{n+1}=(-1)^n\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1+b_2 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & \cdots\cdots & 1+b_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1+b_1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & 1+b_3 & \cdots\cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots\cdots & 1+b_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{2n}(1+b_{n+1})D_n. \tag{2}$$

然而在右边第一项的行列式里从其他各行减第一行并化简之得

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 1 \\ 1+b_2 & 1\cdots\cdots\cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots\ 1+b_n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & 1 \\ b_2 & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & b_3 & 0\cdots\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & b_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}b_2\cdots b_n$$

同理右边第二项也变为

$$\begin{vmatrix} b_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 0 & b_3 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \cdots\cdots\ b_n & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n b_1 b_3 \cdots b_n$$

把这些代入(2)则得下式。

$$D_{n+1}=(-1)^{2n-1}b_2\cdots b_n+(-1)^{2n+1}b_1b_3\cdots b_n+\cdots$$
$$+(-1)^{2n}(1+b_{n+1})D_n$$
$$=(-b_2\cdots b_n-b_1b_3\cdots b_n-\cdots-b_1\cdots b_{n-1}+(1+b_{n+1})D_n$$
$$=-\left(\frac{1}{b_1}+\cdots+\frac{1}{b_n}\right)b_1\cdots b_n$$
$$+(1+b_{n+1})\left(1+\frac{1}{b_1}+\cdots+\frac{1}{b_n}\right)b_1\cdots b_n$$
$$=\left(1+\frac{1}{b_1}+\cdots+\frac{1}{b_{n+1}}\right)b_1\cdots b_{n+1}.$$

故(1)得证.

再者，$S^n(k)$ 的度量张量为

$$g_{ab}=\delta_{ab}+\frac{x^a x^b}{(x^{n+1})^2}$$

故令 $x^a/x^{n+1}=c_a$，则

$$g_{ab}=\delta_{ab}+c_a c_b.$$

$$g=\det(g_{ab})=\begin{vmatrix}1+c_1^2 & c_1c_2\cdots\cdots & c_1c_n\\ c_2c_1 & 1+c_2^2\cdots\cdots & c_2c_n\\ \vdots & & \vdots\\ c_nc_1 & c_nc_2\quad\cdots\cdots & 1+c_n^2\end{vmatrix}$$

$$=c_1\cdots c_n\begin{vmatrix}\frac{1}{c_1}+c_1 & c_2 & \cdots\cdots & c_n\\ c_1 & \frac{1}{c_2}+c_2 & \cdots\cdots & c_n\\ \vdots & & & \\ c_1 & c_2 & \cdots\cdots & \frac{1}{c_n}+c_n\end{vmatrix}$$

$$=(c_1\cdots c_n)^2\begin{vmatrix}1+\frac{1}{c_1^2} & 1 & \cdots\cdots & 1\\ 1 & 1+\frac{1}{c_2^2} & \cdots\cdots & 1\\ \vdots & & & \\ 1 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 1+\frac{1}{c_n^2}\end{vmatrix}$$

$$=(c_1\cdots c_n)^2(1+c_1^2+\cdots+c_n^2)\frac{1}{c_1^2}\cdots\frac{1}{c_n^2}$$

$$=1+c_1^2+\cdots+c_n^2$$

$$=1+\frac{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}{(x^{n+1})^2}=\frac{k^2}{(x^{n+1})^2}.$$

因为 $x^{n+1}>0$，所以

$$\sqrt{g}=\frac{k}{x^{n+1}}.$$

22. 在平行移动下，向量之长不变，故 c：$T_p(M)\to T_p(M)$是正交变换。因为已经知道齐性和乐群作成群，所以是正交变换群$O(T_p)$的子群。

23. 令$t_\lambda{}^\kappa=g^{\kappa\alpha}t_{\lambda\alpha}$，则$\nabla_\nu t_\lambda{}^\kappa=0$. $t=(t_\lambda{}^\kappa)$可看做$T_p(M)\to T_p(M)$的线性映射。设 c 为通过一点 p 的闭曲线，沿 c 转一周的平行移动记以 c：$T_p(M)\to T_p(M)$，则 $c\in H_p$。然因 $\nabla_\nu t_\lambda{}^\kappa=0$，故对于任意的 $X\in T_p(M)$，$c\circ t(X)=t\circ c(X)$成立. 现在令$t(T_p(M))=U$，则$c(U)=c\circ t(T_p)=t\circ c(T_p)=t(T_p)=U$ 成立，故U为 T_p 的不变子空间。然因 H_p 既约，故 $U=\{0\}$或$U=T_p$。当 $U=\{0\}$时，t 在 p 是零张量。因为 t 是平行的，故如在一点是零张量，则必恒为 0，因此设 $a=0$ 时$t_{\lambda\mu}=ag_{\lambda\mu}$ 成立。当 $U=T_p$ 时因 t 为同构映射，故矩阵 $t=(t_\lambda{}^\kappa)$ 的秩为 n。今在讨论中的点 p 设 $a=\rho(p)$ 为矩阵 $t(p)=(t_\lambda{}^\kappa(p))$ 的特征值之一。因 $t_{\lambda\mu}$ 对称，故a 是实数，因此令 $h_\lambda{}^\kappa=t_\lambda{}^\kappa-a\delta_\lambda{}^\kappa$，则$h_\lambda{}^\kappa$为（分量为实数的）张量而且 $\nabla_\nu h_\lambda{}^\kappa=0$。到目前为止的讨论中以 h 代 t，则得 $h_\lambda{}^\kappa=0$ 或 $(h_\lambda{}^\kappa)$ 的秩为 n。然因 $\det(h_\lambda{}^\kappa)$ 在 p 为 0，故 $(h_\lambda{}^\kappa)$ 的秩不能为 n。于是 $h_\lambda{}^\kappa=0$ 在 p 成立。因 $h_\lambda{}^\kappa$ 平行，故 $h_\lambda{}^\kappa=0$，即 $t_\lambda{}^\kappa=a\delta_\lambda{}^\kappa$。

24.
$$\begin{aligned}2h^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta u_\lambda&=h^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta u_\lambda+h^{\beta\alpha}\nabla_\beta\nabla_\alpha u_\lambda\\&=h^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha\nabla_\beta u_\lambda-\nabla_\beta\nabla_\alpha u_\lambda)=-h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta\lambda}{}^\varepsilon u_\varepsilon.\end{aligned}$$

对于 ξ^λ 也一样。

25. 根据$R_{\lambda\mu\nu\omega}$关于λ,μ；ν,ω的反称性。

26. 从 $R_{\lambda\mu\nu\omega}=-R_{\mu\lambda\nu\omega}=-R_{\lambda\mu\omega\nu}$ 可见，只要知道 $R_{\lambda\mu\nu\omega}$ 当 $\lambda<\mu$，$\nu<\omega$ 的情况即可。其数目是

$$\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2(n-1)^2}{4}\qquad(1)$$

而式子 $R_{\lambda\mu\nu\omega}+R_{\mu\nu\lambda\omega}+R_{\nu\lambda\mu\omega}=0$ 的数目对于各 ω 是 λ,μ,ν 的组合数 C_n^3，故有

$$n\times C_n^3=\frac{n!}{3!(n-3)!}\times n=\frac{n^2(n-1)(n-2)}{6}.\qquad(2)$$

$R_{\lambda\mu\omega\nu}$ 由

$$R_{\lambda\mu\nu\omega}=-R_{\mu\nu\lambda\omega}-R_{\nu\lambda\mu\omega}$$

而定（如在右边 $\nu<\mu$，则使 $-R_{\mu\nu\lambda\omega}=R_{\nu\mu\lambda\omega}$），因此只要知道从（1）减

去(2)的分量即可。故其个数是

$$\frac{n^2(n-1)^2}{4}-\frac{n^2(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

27. 令

$$F_1(s,t)=B(X+sZ,Y+tW)$$
$$=R(X+sZ,Y+tW,X+sZ,Y+tW),$$
$$F_2(s,t)=B(X+sW,Y+tZ)$$

则F_1,F_2分别关于s,t是二次式，F_1-F_2的形状是

$$as^2t^2+bs^2t+cst^2+dst+es+ft+g.$$

故得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}(F_1(s,t)-F_2(s,t)\right)_{s=t=0}=d$$

因此只求 F_1,F_2 里 st 的系数即可，F_1 里 st 的系数是

$$R(X,Y,Z,W)+R(X,W,Z,Y)$$
$$+R(Z,W,X,Y)+R(Z,Y,X,W)$$
$$=2\{R(X,Y,Z,W)+R(Z,Y,X,W)\}, \qquad (1)$$

在(1)里交换Z与W即得F_2里 st 的系数

$$2\{R(X,Y,W,Z)+R(W,Y,X,Z)\} \qquad (2)$$

求(1)－(2)得

$$d=4R(X,Y,Z,W)+2\{R(Z,Y,X,W)-R(W,Y,X,Z)\}$$

然因

$$R(Z,Y,X,W)-R(W,Y,X,Z)$$
$$=R(Z,Y,X,W)+R(X,Z,Y,W)$$
$$=-R(Y,X,Z,W)=R(X,Y,Z,W)$$

故$d=6R(X,Y,Z,W)$.

28. 设 $X_{(i)}=(\xi_i{}^\lambda)$ 为 $T_p(M)$ 的标准正交基，则 $R_{\lambda\mu}\xi_i{}^\lambda\xi_i{}^\mu>0$.

然因 $g^{\lambda\mu}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i{}^\lambda\xi_i{}^\mu$，故

$$0<\sum_{i=1}^{n} R_{\lambda\mu}\xi_i{}^\lambda\xi_i{}^\mu = R_{\lambda\mu}g^{\lambda\mu} = R.$$

29. 令给定式子与 $g^{\mu\nu}$ 作积和，则得 $\nabla_\lambda R + 2\nabla^\mu R_{\mu\lambda} = 0$。另外根据(13.10)得 $\nabla_\lambda R = 2\nabla_\mu R_\lambda{}^\mu$，由此得 $\nabla_\lambda R = 0$。

30. 略。

31. 略。

32. 注意 $g_{\lambda\mu}$ 满足 $g_{ia} = g_{ai} = 0$，g_{ij} 只是 $x^1, \cdots, x^r$ 的函数再计算。

33. 就(1,1)阶张量计算之。

34. 设 $X_{(i)} = \xi_i{}^\lambda \partial/\partial x^\lambda$ 在点 p_0 线性无关而且 $\nabla_\mu \xi_i{}^\lambda = 0$。因在平行移动下线性无关性被保存下来，故在各点线性无关。因此在各点矩阵$(\xi_i{}^\lambda)$ 正则。另一方面 $\nabla_\mu \xi_i{}^\lambda = 0$，故由前题得

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \xi_i{}^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu \xi_i{}^\lambda = K_{\mu\nu\varepsilon}{}^\lambda \xi_i{}^\varepsilon = 0.$$

故将 μ, ν, λ 任意固定下来，令 $a_\varepsilon = K_{\mu\nu\varepsilon}{}^\lambda$，则得 $a_\varepsilon \xi_i{}^\varepsilon = 0$，由正则性得 $a_\varepsilon = 0$。因为对所有指标 $K_{\mu\nu\varepsilon}{}^\lambda = 0$ 成立，所以是平坦的。

35. 设 X 为 p_0 处的任意向量。p_0 与其他点 q 的连结曲线设为 c_1, c_2，分别沿这些曲线平行移动 X 到 q 而得向量根据假设相等。故从 $X \in T_p(M)$在各点 q 可唯一地定义向量，在 M^n 上构成平行向量场。因为 X 是任意的，故从 p_0 处的 n 个线性无关向量 $X_{(i)}$ 可作出 n 个平行向量场，由前题知是平坦的。

36. 略。

37. 显然 g' 是对称二阶共变张量．以下证明它是正定的．令 $\xi'^\lambda = h_\alpha{}^\lambda \xi^\alpha$ 则

$$g'_{\lambda\mu}\xi^\lambda\xi^\mu = g_{\alpha\beta}\xi'^\alpha\xi'^\beta \geqslant 0.$$

式中等号只在 $\xi'^\lambda = 0$ 时成立。因为 $H = (h_\lambda{}^\mu)$ 正则，故 $\xi'^\lambda = 0$ 与 $\xi^\lambda = 0$ 等价。于是 g' 也是黎曼度量。

后半注意 $K = H^{-1} = (k_\lambda{}^\mu)$，$k_\lambda{}^\alpha h_\alpha{}^\mu = h_\lambda{}^\alpha k_\alpha{}^\mu = \delta_\lambda{}^\mu$，$g'^{\lambda\mu} = g^{\alpha\beta} k_\alpha{}^\lambda k_\beta{}^\mu$ 再计算。

38. 因为 $\nabla_\mu \xi^\lambda = 0$，所以从 $\nabla_\lambda \nabla_\mu \xi^\kappa - \nabla_\mu \nabla_\lambda \xi^\kappa = R_{\lambda\mu\alpha}{}^\kappa \xi^\alpha$ 得 $R_{\lambda\mu\alpha}{}^\kappa \xi^\alpha$

$=0$。λ 与 κ 缩短之得 $R_{\mu\alpha}\xi^\alpha=0$。特别在爱因斯坦空间里 $(R/n)\xi^\alpha=0$，故如 $R\neq 0$，则 $\xi^\alpha=0$。

39. 令 $Z_{\lambda\mu}=R_{\lambda\mu}-\frac{R}{n}g_{\lambda\mu}$，则 $Z_{\lambda\mu}Z^{\lambda\mu}=R_{\lambda\mu}R^{\lambda\mu}-(R^2/n)$。然而在 $Z_{\lambda\mu}Z^{\lambda\mu}\geqslant 0$ 中只有 $Z_{\lambda\mu}=0$，即为爱因斯坦空间时才成立

40. 讨论 $\nabla_\mu v_\nu=kg_{\mu\nu}+v_\mu v_\nu$ 的可积条件：

$$\nabla_\lambda\nabla_\mu v_\nu-\nabla_\mu\nabla_\lambda v_\nu=-R_{\lambda\mu\nu}{}^{\varepsilon}v_\varepsilon \qquad (1)$$

因为

$$\nabla_\lambda\nabla_\mu v_\nu=\nabla_\lambda\nabla_\mu v_\nu+v_\mu\nabla_\lambda v_\nu=k(g_{\lambda\mu}v_\nu+g_{\lambda\nu}v_\mu)+2v_\lambda v_\mu v_\nu$$

故(1)变成

$$k(g_{\lambda\nu}v_\mu-g_{\mu\nu}v_\lambda)=-R_{\lambda\mu\nu}{}^{\varepsilon}v_\varepsilon,$$

对于所论常曲率空间，此式恒成立。

41. 对于$i=1,\cdots,n-1$,

$$\left\{\begin{matrix}i\\ ni\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}n\\ nn\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{x^n},\quad \left\{\begin{matrix}n\\ i\ i\end{matrix}\right\}=\frac{1}{x^n},(i\text{不求和})$$

其他$\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}$全是0。

42. 因为 $(n-1)\rho(X)=\frac{R_{\lambda\mu}\xi^\lambda\xi^\mu}{g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta}$与$X$无关，令 $(n-1)\rho(X)=a$，去分母得 $(R_{\lambda\mu}-ag_{\lambda\mu})\xi^\lambda\xi^\mu=0$。因 ξ^λ 任意，故得 $R_{\lambda\mu}=ag_{\lambda\mu}$。

43. (i)如 $n=2$，则

$$R_{\lambda\mu\nu\omega}=-a(x)(g_{\lambda\nu}g_{\mu\omega}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\omega}) \qquad (1)$$

形状的式子恒成立（参照黎曼几何 p.86）。故得

$$R_{\mu\nu}=(n-1)a(x)g_{\mu\nu}=k(x)g_{\mu\nu} \qquad (2)$$

(ii) 在二维爱因斯坦空间里，由定义知 $k(x)$ 是常数。故由(1)得常曲率空间。其次考虑三维爱因斯坦空间。在一点 p 任取标准正交基 X_1,X_2,X_3，考虑关于这种基底的分量。因为是爱因斯坦空间，所以有

$$R_{jk}=a\delta_{jk}$$

的形状。再导出(1)的形状即可。因为是三维情况，所以只考虑

$$R_{1212},\ R_{1313},\ R_{1414},\ R_{1213},\ R_{1223},\ R_{1323}$$

即可。因 $R_{ik}=\sum_{j=1}^{3}R_{jikj}$，故

$$\text{从 } R_{11}=a \text{ 得 } R_{1212}+R_{1313}=-a,$$
$$\text{从 } R_{22}=a \text{ 得 } R_{2121}+R_{2323}=-a,$$
$$\text{从 } R_{33}=a \text{ 得 } R_{3131}+R_{3232}=-a.$$

由此得

$$R_{1212}=R_{1313}=R_{1414}=-a/2.$$

再从 $R_{12}=0$ 得 $R_{1332}=R_{3123}=0$。同理$R_{1213}=R_{1223}=R_{1323}=0$。故关于基底 $\{X_i\}$，

$$R_{ijkl}=-(a/2)(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})$$

成立。如作基底变换 $\{X_i\}\to\{\partial/\partial x^\lambda\}$，则上式变为

$$R_{\lambda\mu\nu\omega}=-(a/2)(g_{\lambda\nu}g_{\mu\omega}-g_{\mu\nu}g_{\lambda\omega})$$

故为常曲率空间。

44. 因为是二维情况，在 $g=\det(g_{\lambda\mu})=g_{11}g_{22}-(g_{12})^2$. 在坐标变换 $\{x^\lambda\}\to\{x'^\lambda\}$下，$g'=\Delta^2 g$，$\Delta=\det(\partial x/\partial x')$，故对于分子证出$R'_{1212}=\Delta^2 R_{1212}$ 即可。

45. 设 $M^n=M^r\times M^s(n=r+s)$ 为非平坦常曲率空间，则

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=-k(g_{\lambda\nu}\delta_\mu{}^\kappa-g_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\kappa),\quad k\neq 0 \tag{1}$$

关于 M^n 的决定邻域系$\{x^\lambda\}=\{x^i,x^a\}$写之，由于 $g_{ia}=0$，$R_{iaj}{}^h=0$ 等可见（参照问题32），(1)与

$$R_{ijk}{}^l=-k(g_{ik}\delta_j{}^l-g_{jk}\delta_i{}^l), \tag{2}$$

$$R_{abc}{}^e=-k(g_{ac}\delta_b{}^e-g_{bc}\delta_a{}^e) \tag{3}$$

等价。然而从(1),(2),(3)得

$$k=\frac{R}{n(n-1)}=\frac{R_1}{r(r-1)}=\frac{R_2}{s(s-1)}.$$

再由第 32 题 (iv) 知 $R=R_1+R_2$。这就发生矛盾。

46. 用前题的记号，设 M^r，M^s 为爱因斯坦空间，则

$$R_{jk}=\frac{R_1}{r}g_{jk},\qquad R_{ab}=\frac{R_2}{s}g_{ab}. \tag{1}$$

M^n 为爱因斯坦空间的条件 $R_{\lambda\mu}=(R/n)g_{\lambda\mu}$ 与

$$R_{ij}=\frac{R}{n}g_{ij},\qquad R_{ab}=\frac{R}{n}g_{ab} \tag{2}$$

等价。比较(1)与(2)。

47. 使用前题的符号。M^n 的利齐张量 $R_{\lambda\mu}$ 的分量是前题的(1)与 $R_{ia}=R_{ai}=0$。说明 $\nabla_\lambda R_{\mu\nu}=0$。例如在 M^r 里的共变导数用 ∇' 表示，则

$$\nabla_i R_{jk}=\frac{\partial R_{jk}}{\partial x^i}-\left\{{\lambda \atop ij}\right\}R_{\lambda k}-\left\{{\lambda \atop ik}\right\}R_{j\lambda}$$

$$=\frac{\partial R_{jk}}{\partial x^i}-\left\{{l \atop ij}\right\}R_{lk}-\left\{{l \atop ik}\right\}R_{jl}=\nabla'_i R_{jk}=0.$$

$$\nabla_i R_{ja}=\frac{\partial R_{ja}}{\partial x^i}-\left\{{\lambda \atop ij}\right\}R_{\lambda a}-\left\{{\lambda \atop ia}\right\}R_{j\lambda}$$

$$=0-\left\{{k \atop ij}\right\}R_{ka}-\left\{{b \atop ij}\right\}R_{ba}-\left\{{k \atop ia}\right\}R_{jk}-\left\{{b \atop ia}\right\}R_{jb}=0.$$

以下同理可得。

48. 设 $X=(\xi^\lambda)$，$Y=(\eta^\lambda)$ 为 $T_p(M)$ 的单位向量而且互相正交。令 $t^{\lambda\mu}=\xi^\lambda\eta^\mu-\xi^\mu\eta^\lambda=-t^{\mu\lambda}$，则得

$$t_{\lambda\mu}t^{\lambda\mu}=2,\quad R_{\lambda\mu\nu\omega}t^{\lambda\mu}t^{\nu\omega}=4R_{\lambda\mu\nu\omega}\xi^\lambda\eta^\mu\xi^\nu\eta^\omega$$

故

$$-\frac{R_{\lambda\mu\nu\omega}t^{\lambda\mu}t^{\nu\omega}}{t_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta}}=-2R_{\lambda\mu\nu\omega}\xi^\lambda\eta^\mu\xi^\nu\eta^\omega=2\rho(X,\ Y).$$

于是 $a\leqslant 2\rho(X,\ Y)\leqslant b$。

49. 因为 $X_j\cos\theta+X_k\sin\theta$ 是与 X_i 正交的单位向量，故

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\rho(X_i,\ X_j\cos\theta+X_k\sin\theta)\\&=-R(X_i,\ X_j\cos\theta+X_k\sin\theta,\ X_i,\ X_j\cos\theta+X_k\sin\theta)\\&=\rho_{ij}\cos^2\theta+\rho_{ik}\sin^2\theta-R_{ijik}\sin 2\theta.\end{aligned}$$

因为 $f(0)=\rho_{ij}$ 是临界值，所以 $f'(0)=0$。然因

$$f'(\theta) = -2\rho_{ij}\cos\theta\sin\theta + 2\rho_{ik}\sin\theta\cos\theta - 2R_{ijik}\cos 2\theta$$

故

$$0 = f'(0) = -2R_{ijik}.$$

注意 这时 $f(\theta) = \rho_{ij}\cos^2\theta + \rho_{ik}\sin^2\theta = (\rho_{ij} - \rho_{ik})\cos^2\theta + \rho_{ik}$ 成立，故如 ρ_{ij} 为最大值（最小值），则 ρ_{ik} 为最小值（最大值）。

50. 取 $pl(X_1, X_2)$为 $\rho(X_1, X_2)$ 在 p 的断面曲率的最大者（在 p 处的标准正交系(X, Y)的集按自然拓扑是紧致，$\rho(X, Y)$是这里的连续函数故存在最大值. 证明略），在 $pl(X_1, X_2)$ 里除了 X_1，X_2 是标准正交的条件以外是任意的. 设 $pl(X_1, X_2)$的正交补空间为 $pl(X_3, X_4)$. X_3，X_4 也在其平面中是任意的. 现在对于$Y \in pl(X_1, X_2)$, $Z \in pl(X_3, X_4)$，$\rho(Y, Z)$取最大值的Y，Z分别取做 X_1, X_3(这时 X_2，X_4 除了方向外自然地决定).

首先因为 $\rho(X_1, X_2)$是最大值，所以是下列函数

$$\rho(X_1, X_2\cos\theta + X_3\sin\theta),\ \rho(X_1, X_2\cos\theta + X_4\sin\theta),$$
$$\rho(X_2, X_1\cos\theta + X_3\sin\theta),\ \rho(X_2, X_1\cos\theta + X_4\sin\theta)$$

分别在 $\theta = 0$ 取临界值. 故由前题知

$$R_{1213} = R_{1214} = R_{2123} = R_{2124} = 0.$$

其次从X_1，X_3 的取法知，$\rho(X_1, X_3)$是

$$\rho(X_1, X_3\cos\theta + X_4\sin\theta),\ \rho(X_3, X_1\cos\theta + X_2\sin\theta)$$

在 $\theta = 0$ 的临界值. 故也得

$$R_{1314} = R_{3132} = 0.$$

51. 在四维爱因斯坦空间里，在点 p 关于任意标准正交基，

$$\rho_{13} = \rho_{24},\ \rho_{12} = \rho_{34},\ \rho_{14} = \rho_{23}$$

成立（参照 § 14 例题 2）. 另外

$$R_{jk} = \sum_{i=1}^{4} R_{ijki} = \frac{R}{4}\delta_{jk}$$

故对于 $j = 2$，$k = 3$

$$R_{1231} + R_{4234} = 0.$$

取前题的标准正交基，则 $R_{1231} = 0$，故 $R_{4234} = 0$. 同理关于这种基底

可得 $$R_{4234}=R_{3234}=R_{1443}=R_{1334}=R_{2324}=R_{1424}=0$$

故曲率张量的分量

$$R_{1234},\quad R_{1342},\quad R_{1423}$$

与 $\rho_{ij}=\rho(X_i,\ X_j)=-R_{ijij}$ 以外全是 0。其次因为选的基底使 ρ_{12} 最大，所以

$$\rho(aX_1+bX_3,\ cX_2+dX_4)\leqslant\rho_{12}$$

对于 $a^2+b^2\neq0$，$c^2+d^2\neq0$ 的任意 a，b，c，d 成立。由此得

$$-R(aX_1+bX_3,\ cX_2+dX_4,\ aX_1+bX_3,\ cX_2+dX_4)$$
$$\leqslant\rho_{12}(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

将左边展开之，

$$\begin{aligned}\text{左边}&=a^2c^2\rho_{12}+a^2d^2\rho_{14}+b^2c^2\rho_{32}+b^2d^2\rho_{34}-2abcd(R_{1234}+R_{1432})\\&=(a^2c^2+b^2d^2)\rho_{12}+(a^2d^2+b^2c^2)\rho_{14}+2abcd(R_{1243}-R_{1432}).\end{aligned}$$

故得

$$2abcd(R_{1243}-R_{1432})\leqslant(a^2d^2+b^2c^2)(\rho_{12}-\rho_{14}).\qquad(1)$$

因为 a,b,c,d 是任意的，故令 $2abcd=a^2d^2+b^2c^2$ 即 $ad-bc=0$，则

$$R_{1243}-R_{1432}\leqslant\rho_{12}-\rho_{14}.$$

在(1) 中以 $-b$ 代 b，同理得

$$-(R_{1243}-R_{1432})\leqslant\rho_{12}-\rho_{14},\quad\therefore\ |R_{1243}-R_{1432}|\leqslant\rho_{12}-\rho_{14}.$$

其他不等式由

$$\rho(aX_1+bX_2,\ cX_3+dX_4)\leqslant\rho_{13},\quad\rho(aX_1+bX_4,\ cX_2+dX_3)\leqslant\rho_{12}$$

同理可得。

52. 在 X，Y，Z 张成的三维空间里，取 P，Q 使 X，P，Q 为标准正交系而且可写为

$$Y=aX+bP,\qquad\qquad Z=a'X+cP+dQ.$$

$\langle X,\ Y\rangle=a$，$\langle X,\ Z\rangle=a'$，又由假设知 $\langle X,\ Y\rangle=\langle X,\ Z\rangle>0$，

故 $$a=a'>0.$$

因为 $pl(X,\ Y)=pl(X,\ P)$，所以

$$\rho(X,\ P)=\Delta\delta.\qquad(1)$$

又因 $pl(X,\ cP+dQ)=pl(X,\ Z)$，故

$$\rho(X,\ cP+dQ)=\Delta\delta. \tag{2}$$

另外根据§14 例题3 知

$$|R_{ijik}|\leqslant|\rho_{ij}-\Delta\delta|^{\frac{1}{2}}|\rho_{ik}-\Delta\delta|^{\frac{1}{2}}$$

故对于满足

$$\langle X,\ U\rangle=\langle P,\ U\rangle=0 \tag{3}$$

的U，令$X=X_i, P=X_j, U=X_k$，则 $\rho_{ij}=\rho(X,P)=\Delta\delta$ 故 $R_{ijik}=0$。

即对于满足(3) 的单位向量U，

$$R(X,P,X,U)=0. \tag{4}$$

同理得

$$R(P,X,P,U)=0 \tag{5}$$

((4)，(5)也可从第 49 题求出)．其次从(2)得

$$\Delta\delta=-\frac{R(X,cP+dQ,X,cP+dQ)}{c^2+d^2}$$

$$=-\frac{c^2R(X,P,X,P)+2cdR(X,P,X,Q)+d^2R(X,Q,X,Q)}{c^2+d^2}$$

去分母并用(1)，(4)得

$$(c^2+d^2)\Delta\delta=c^2\rho(X,\ P)+d^2\rho(X,\ Q)=c^2\Delta\delta+d^2\rho(X,\ Q).$$

由此可见

$$\rho(X,\ Q)=\Delta\delta. \tag{6}$$

与求(4)，(5)一样，对于

$$\langle X,\ U\rangle=\langle Q,\ U\rangle=0$$

的U，从(6)可得

$$R(X,\ Q,\ X,\ U)=R(Q,\ X,\ Q,\ U)=0 \tag{7}$$

其次计算

$$\rho(Y,\ Z)=-\frac{R(Y,\ Z,\ Y,\ Z)}{\|Y\|^2\|Z\|^2-\langle Y,\ Z\rangle^2}$$

$$\text{分母}=(a^2+b^2)(a^2+c^2+d^2)-(a^2+bc)^2$$
$$=a^2d^2+b^2d^2+a^2(b-c)^2.$$

分子$=R(Y, Z, Y, Z)$

$=R(aX+bP,\ aX+cP+dQ,\ aX+bP,\ aX+cP+dQ)$。

展开之，使用(4)，(5)，(7)再通过复杂的计算得

$$R(Y,Z,Y,Z)=-a^2(b-c)^2\rho(X,P)-a^2d^2\rho(X,Q)-b^2d^2\rho(P,Q).$$

于是

$$\rho(Y,\ Z)=\frac{a^2(b-c)^2\Delta\delta+a^2d^2\Delta\delta+b^2d^2\rho(P,\ Q)}{a^2d^2+b^2d^2+a^2(b-c)^2}.$$

然而根据假设 $\rho(P,\ Q)\leqslant\Delta\delta$，$\delta<1$，故 $\Delta\delta<\Delta$。从而 $\rho(Y,\ Z)\leqslant\Delta\delta<\Delta$。

习题四解答 (pp. 69～77)

1. 由(15.11)知，$X=(\xi^\lambda)$为仿射开玲向量的条件是

$$\mathcal{L}_X\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}=\nabla_\mu(\nabla_\nu\xi^\lambda+2S_{\varepsilon\nu}{}^\lambda\xi^\varepsilon)+K_{\varepsilon\mu\nu}{}^\lambda\xi^\varepsilon=0.$$

此式关于 ξ 是线性的：

$$\mathcal{L}_{aX+bY}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}=\mathcal{L}_{aX}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}+\mathcal{L}_{bY}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}=a\mathcal{L}_X\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}+b\mathcal{L}_Y\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}=0.$$

2 根据假设，

$$\mathcal{L}_X\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}=\mathcal{L}_Y\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}=0$$

从§15 例题 1 知

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}=\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}-\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}=0$$

3 (i) 因 $\nabla_a f=\partial f/\partial x^a$，故显然。(ii)，(iii)与下列(iv)一样。

(iv) $$\mathcal{L}_X T_{\lambda\mu}{}^\kappa=\xi^\alpha\frac{\partial T_{\lambda\mu}{}^\kappa}{\partial x^\alpha}+T_{\alpha\mu}{}^\kappa\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}+T_{\lambda\alpha}{}^\kappa\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}-T_{\lambda\mu}{}^\alpha\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x^\alpha}.$$

然因

$$\nabla_\alpha T_{\lambda\mu}{}^\kappa=\frac{\partial T_{\lambda\mu}{}^\kappa}{\partial x^\alpha}-\left\{\begin{matrix}\varepsilon\\ \alpha\lambda\end{matrix}\right\}T_{\varepsilon\mu}{}^\kappa-\left\{\begin{matrix}\varepsilon\\ \alpha\mu\end{matrix}\right\}T_{\lambda\varepsilon}{}^\kappa+\left\{\begin{matrix}\kappa\\ \alpha\varepsilon\end{matrix}\right\}T_{\lambda\mu}{}^\varepsilon,$$

$$\nabla_\lambda\xi^\alpha=\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \lambda\varepsilon\end{matrix}\right\}\xi^\varepsilon$$

故

$$\mathscr{L}_X T_{\lambda\mu}{}^{\kappa} = \xi^{\alpha}\left(\nabla_\alpha T_{\lambda\mu}{}^{\kappa} + \left\{{\varepsilon \atop \alpha\lambda}\right\} T_{\varepsilon\mu}{}^{\kappa} + \left\{{\varepsilon \atop \alpha\mu}\right\} T_{\lambda\varepsilon}{}^{\kappa} - \left\{{\kappa \atop \alpha\varepsilon}\right\} T_{\lambda\mu}{}^{\varepsilon}\right)$$

$$+ T_{\alpha\mu}{}^{\kappa}\left(\nabla_\lambda \xi^{\alpha} - \left\{{\alpha \atop \lambda\varepsilon}\right\}\xi^{\varepsilon}\right) + T_{\lambda\alpha}{}^{\kappa}\left(\nabla_\mu \xi^{\alpha} - \left\{{\alpha \atop \mu\varepsilon}\right\}\xi^{\varepsilon}\right)$$

$$- T_{\lambda\mu}{}^{\alpha}\left(\nabla_\alpha \xi^{\kappa} - \left\{{\kappa \atop \alpha\varepsilon}\right\}\xi^{\varepsilon}\right)$$

$$= \xi^{\alpha}\nabla_\alpha T_{\lambda\mu}{}^{\kappa} + T_{\alpha\mu}{}^{\kappa}\nabla_\lambda \xi^{\alpha} + T_{\lambda\alpha}{}^{\kappa}\nabla_\mu \xi^{\alpha} - T_{\lambda\mu}{}^{\alpha}\nabla_\alpha \xi^{\kappa}.$$

4. (iii)

$$\nabla_\lambda \mathscr{L}_X T_\mu{}^{\kappa} = \nabla_\lambda(\xi^{\alpha}\nabla_\alpha T_\mu{}^{\kappa} + T_\alpha{}^{\kappa}\nabla_\mu \xi^{\alpha} - T_\mu{}^{\alpha}\nabla_\alpha \xi^{\kappa})$$

$$= \nabla_\lambda \xi^{\alpha}\nabla_\alpha T_\beta{}^{\kappa} + \xi^{\alpha}\nabla_\lambda\nabla_\alpha T_\mu{}^{\kappa} + \nabla_\lambda T_\alpha{}^{\kappa}\nabla_\mu \xi^{\alpha} + T_\alpha{}^{\kappa}\nabla_\lambda\nabla_\mu \xi^{\alpha}$$

$$- \nabla_\lambda T_\mu{}^{\alpha}\nabla_\alpha \xi^{\kappa} - T_\mu{}^{\alpha}\nabla_\lambda\nabla_\mu \xi^{\kappa}$$

$$\mathscr{L}_X \nabla_\lambda T_\mu{}^{\kappa} = \xi^{\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\lambda T_\mu{}^{\kappa} + \nabla_\alpha T_\mu{}^{\kappa}\nabla_\lambda \xi^{\alpha} + \nabla_\lambda T_\alpha{}^{\kappa}\nabla_\mu \xi^{\alpha} - \nabla_\lambda T_\mu{}^{\alpha}\nabla_\alpha \xi^{\kappa}.$$

边边相减得

$$\nabla_\lambda \mathscr{L}_X T_\mu{}^{\kappa} - \mathscr{L}_X \nabla_\lambda T_\mu{}^{\kappa} = \xi^{\alpha}(\nabla_\lambda\nabla_\alpha T_\mu{}^{\kappa} - \nabla_\alpha\nabla_\lambda T_\mu{}^{\kappa})$$

$$+ T_\alpha{}^{\kappa}\nabla_\lambda\nabla_\mu \xi^{\alpha} - T_\mu{}^{\alpha}\nabla_\lambda\nabla_\alpha \xi^{\kappa}$$

$$= \xi^{\alpha}(-R_{\lambda\alpha\mu}{}^{\varepsilon}T_\varepsilon{}^{\kappa} + R_{\lambda\alpha\varepsilon}{}^{\kappa}T_\mu{}^{\varepsilon}) + T_\varepsilon{}^{\kappa}\nabla_\lambda\nabla_\mu \xi^{\varepsilon} -$$

$$- T_\mu{}^{\varepsilon}\nabla_\lambda\nabla_\varepsilon \xi^{\kappa} = -T_\mu{}^{\varepsilon}(\nabla_\lambda\nabla_\varepsilon \xi^{\kappa} - R_{\lambda\alpha\varepsilon}{}^{\kappa}\xi^{\alpha})$$

$$+ T_\varepsilon{}^{\kappa}(\nabla_\lambda\nabla_\mu \xi^{\varepsilon} - R_{\lambda\alpha\mu}{}^{\varepsilon}\xi^{\alpha})$$

$$= -T_\mu{}^{\varepsilon}\mathscr{L}_X\left\{{\kappa \atop \lambda\varepsilon}\right\} + T_\varepsilon{}^{\kappa}\mathscr{L}_X\left\{{\varepsilon \atop \lambda\mu}\right\}.$$

(iv) 因为 $\nabla_\nu \mathscr{L}_X g_{\mu\alpha} = \nabla_\nu(\nabla_\mu \xi_\alpha + \nabla_\alpha \xi_\mu)$，所以

$$\nabla_\nu \mathscr{L}_X g_{\mu\alpha} + \nabla_\mu \mathscr{L}_X g_{\nu\alpha} - \nabla_\alpha \mathscr{L}_X g_{\mu\nu}$$

$$= \nabla_\nu\nabla_\mu \xi_\alpha + \nabla_\nu\nabla_\alpha \xi_\mu + \nabla_\mu\nabla_\nu \xi_\alpha + \nabla_\mu\nabla_\alpha \xi_\nu - \nabla_\alpha\nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\alpha\nabla_\nu \xi_\mu$$

$$= \nabla_\nu\nabla_\mu \xi_\alpha + \nabla_\mu\nabla_\nu \xi_\alpha + (\nabla_\nu\nabla_\alpha \xi_\mu - \nabla_\alpha\nabla_\nu \xi_\mu) + (\nabla_\mu\nabla_\alpha \xi_\nu - \nabla_\alpha\nabla_\mu \xi_\nu)$$

$$= (\nabla_\mu\nabla_\nu \xi_\alpha - R_{\nu\mu\alpha}{}^{\varepsilon}\xi_\varepsilon) + \nabla_\mu\nabla_\nu \xi_\alpha - R_{\nu\alpha\mu}{}^{\varepsilon}\xi_\varepsilon - R_{\mu\alpha\nu}{}^{\varepsilon}\xi_\varepsilon$$

$$= 2\nabla_\mu\nabla_\nu \xi_\alpha - (R_{\nu\mu\alpha}{}^{\varepsilon} + R_{\nu\alpha\mu}{}^{\varepsilon} + R_{\mu\alpha\nu}{}^{\varepsilon})\xi_\varepsilon = 2(\nabla_\mu\nabla_\nu \xi_\alpha - R_{\nu\alpha\mu}{}^{\varepsilon}\xi_\varepsilon)$$

由此得(iv)。

(v) 左边 $= \nabla_\lambda(\nabla_\mu\nabla_\nu \xi^{\kappa} + R_{\varepsilon\mu\nu}{}^{\kappa}\xi^{\varepsilon}) - \nabla_\mu(\nabla_\lambda\nabla_\nu \xi^{\kappa} + R_{\varepsilon\lambda\nu}{}^{\kappa}\xi^{\varepsilon})$

$$= (\nabla_\lambda\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\lambda)\nabla_\nu \xi^{\kappa} + \nabla_\lambda(R_{\varepsilon\mu\nu}{}^{\kappa}\xi^{\varepsilon}) - \nabla_\mu(R_{\varepsilon\lambda\nu}{}^{\kappa}\xi^{\varepsilon})$$

$$= -R_{\lambda\mu\nu}{}^{\varepsilon}\nabla_{\varepsilon}\xi^{\kappa} + R_{\lambda\mu\varepsilon}{}^{\kappa}\nabla_{\nu}\xi^{\varepsilon} + \nabla_{\lambda}R_{\varepsilon\mu\nu}{}^{\kappa}\xi^{\varepsilon}$$
$$+ R_{\varepsilon\mu\nu}{}^{\kappa}\nabla_{\lambda}\xi^{\varepsilon} - \nabla_{\mu}R_{\varepsilon\lambda\nu}{}^{\kappa}\xi^{\varepsilon} - R_{\varepsilon\lambda\nu}{}^{\kappa}\nabla_{\mu}\xi^{\varepsilon}.$$

再使用比安基恒等式、曲率张量的性质加以变形。

5. 因为$\mathscr{L}_X\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = 0$，故由前题(v)得 $\mathscr{L}_X R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa} = 0$. 又因缩短与李导数可换，故$\mathscr{L}_X R_{\mu\nu} = 0$。

6. 因为

$$\mathscr{L}_X\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\xi^{\lambda} + R_{\alpha\mu\nu}{}^{\lambda}\xi^{\alpha} = 0. \qquad (1)$$

所以与 $g^{\mu\nu}$ 作积和并由 $g^{\mu\nu}\nabla_{\mu} = \nabla^{\nu}$, $g^{\mu\nu}R_{\alpha\mu\nu}{}^{\lambda} = R_{\alpha}{}^{\lambda}$ 可得 (i)。其次在(1)里关于与 ν 缩短，则由 $R_{\alpha\mu\lambda}{}^{\lambda} = 0$ 得(ii)。

7. 根据(15.11)

$$\nabla_{\mu}(\nabla_{\nu}\xi^{\lambda} + 2S_{\varepsilon\nu}{}^{\lambda}\xi^{\varepsilon}) + K_{\varepsilon\mu\nu}{}^{\lambda}\xi^{\varepsilon} = 0$$

展开之得

$$\frac{\partial^2\xi^{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} + (\cdots\cdots)_{\alpha}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + (\cdots\cdots)_{\alpha}\xi^{\alpha} = 0 \qquad (1)$$

的形状。故如 $\xi^{\lambda}(p_0) = (\partial\xi^{\alpha}/\partial x^{\mu})(p_0) = 0$, 则$(\partial^2\xi^{\lambda}/\partial x^{\mu}\partial x^{\nu})_{p_0} = 0$。其次将(1)对 x^{ω} 求偏导数则得

$$\frac{\partial^3\xi^{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}\partial x^{\omega}} + (\cdots)_{\alpha}\frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\omega}} + (\cdots)_{\alpha}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\omega}} + (\cdots)_{\alpha}\xi^{\alpha} = 0$$

的形状，故$(\partial^3\xi^{\lambda}/\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}\partial x^{\omega})_{p_0} = 0$。以下同理。

8. $S^n(k)$的坐标邻域 U^+_{n+1} 以及 U^-_{n+1} 在 P^n 上做为点集是相同的邻域，这里的点p有两种坐标 x^a 与 $\overline{x}^a = -x^a$ (参照习题二第2题)。$S^n(k)$关于 x^a 的度量张量是

$$g_{ab} = \delta_{ab} + \frac{x^a x^b}{(x^{n+1})^2}$$

关于 $\overline{x}^a$ 是

$$\overline{g}_{ab} = \delta_{ab} + \frac{\overline{x}^a\overline{x}^b}{(\overline{x}^{n+1})^2} = \delta_{ab} + \frac{x^a x^b}{(x^{n+1})^2}$$

故关于坐标变换$\{x^a\}\to\{\overline{x}^a\}$

$$\frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^a}\ \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^b} g_{cd} = (-\delta_a{}^c)(-\delta_b{}^d) g_{cd} = g_{ab} = \bar{g}_{ab}$$

成立，把这些看做 P^n 的度量并无矛盾。

9. 因关于等距映射 ϕ 在各点 p，ϕ_* 是从 $T_p(M)$ 到 $T_{\phi(p)}(\overline{M})$ 的正交映射，故与 § 4 的讨论一样从 $\|X+Y\|^2 = \|\phi_*(X+Y)\|^2 = \|\phi_*(X)+\phi_*(Y)\|^2$ 得 $\langle X, Y\rangle = \langle \phi_*(X), \phi_*(Y)\rangle$。

10. 因 ϕ 为微分同胚映射，故可取局部坐标使得在 ϕ 下对应点具有相同坐标。设 $\bar{p} = \phi(p)$ 则诱导度量 $g = \Phi(\bar{g})$ 由 $g_{\lambda\mu}(p) = \bar{g}_{\lambda\mu}(\bar{p})$ 而定。故 $\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}_p = \left\{ {\bar{\lambda} \atop \mu\nu} \right\}_{\bar{p}}$。此式说明 $\left\{ {\bar{\lambda} \atop \mu\nu} \right\}$ 的诱导联络与关于 g 的黎曼联络一致。

11. 使对应点具有相同坐标则

$$\overset{*}{g}_{\lambda\mu}(p) = \bar{g}_{\lambda\mu}(\bar{p}),\quad \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}^*_p = \left\{ {\bar{\lambda} \atop \mu\nu} \right\}_{\bar{p}}$$

故曲率张量、利齐张量在对应点也有相同分量，因此 $\overset{*}{R}(p) = \bar{R}(\bar{p})$.

12. 设 ϕ: $\{M^n, g\} \to \{\overline{M}^n, \bar{g}\}$ 是等距映射。使在 ϕ 下的对应点具有相同坐标，则

$$g_{\lambda\mu}(p) = \bar{g}_{\lambda\mu}(\bar{p}),\quad \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}_p = \left\{ {\bar{\lambda} \atop \mu\nu} \right\}_{\bar{p}},\quad R_{\lambda\mu\nu\omega}(p) = \bar{R}_{\lambda\mu\nu\omega}(\bar{p}).$$

再设 $X = (\xi^\lambda)$。因 $\phi_*(X) = (\xi^\lambda)$，故记 $\bar{X} = \phi_*(X)$ 则 $R(X, Y, X, Y)_p = \bar{R}(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{X}, \bar{Y})_{\bar{p}}$。又因 $\|X\| = \|\bar{X}\|$，$\langle X, Y\rangle_p = \langle \bar{X}, \bar{Y}\rangle_{\bar{p}}$ 成立，故得

$$\rho(X,Y)_p = -\frac{R(X,Y,X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2}$$

$$= -\frac{\bar{R}(\bar{X},\bar{Y},\bar{X},\bar{Y})}{\|\bar{X}\|^2\|\bar{Y}\|^2 - \langle \bar{X},\bar{Y}\rangle^2}$$

$$= \rho(\bar{X}, \bar{Y})_{\bar{p}}.$$

13. (i) 设 $\phi \in G_p$，则 ϕ_* 是 $T_p(M)$ 的正交变换。再对于 ϕ，$\psi \in G_p$，因 $\phi\circ\psi \in G_p$，故 $(\phi\circ\psi)_* \in dG_p$。现在根据 $\phi_*\circ\psi_* = (\phi\circ\psi)_*$ 定

义 ϕ_* 与 ψ_* 的积，则 dG_p 关于这种运算成为$O(T_p(M))$子群。

(ii) 由前题知 $\rho(X, Y)=\rho(\phi_*(X), \phi_*(Y))$在 p 成立。现在设X，Y；$\bar{X}$，$\bar{Y}$分别为 $T_p(M)$的任意标准正交系。这时由习题一第39 题知存在 $\phi_*\in dG_p$ 使得 $\bar{X}=\phi_*(X)$，$\bar{Y}=\phi_*(Y)$，故$\rho(X, Y)=\rho(\bar{X}, \bar{Y})$。因此，断面曲率在$p$与$X$，$Y$的选法无关。因 p 任意故 M^n 为常曲率空间。

14. 如$\|X\|^2=\xi^\lambda\xi_\lambda$ 在点 p_0 取最大（小）值，则由§16例题 2 知在 p_0 的轨道 c 上总是这样。故在 c 上任意的点

$$0=\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\xi^\lambda\xi_\lambda)=\nabla_\mu(\xi^\lambda\xi_\lambda)=2\xi^\lambda\nabla_\mu\xi_\lambda=-2\xi^\lambda\nabla_\lambda\xi_\mu.$$

$\therefore \xi^\lambda\nabla_\lambda\xi^\mu=0$。然因 c 为X的积分曲线，故 $\xi^\lambda=dx^\lambda/dt$。于是得

$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{dx^\lambda}{dt}=0$$

即 c 为测地线。

15. 设并进变换群$\{\phi_t\}$诱导的并进开玲向量为X，则由定义知$\|X\|=$一定。故可认为在任意点$\|X\|$取最大值，再由前题知轨道是测地线。

16. 开玲向量$X=(\xi^\lambda)$满足 $\nabla_\lambda\xi_\mu+\nabla_\mu\xi_\lambda=0$。现在设 c：$x^\lambda=x^\lambda(t)$为测地线，则

$$\frac{\delta}{\delta t}\langle X, \dot{c}\rangle=\frac{\delta}{\delta t}\left(\xi_\lambda\frac{dx^\lambda}{dt}\right)=\frac{dx^\mu}{dt}\nabla_\mu\xi_\lambda\frac{dx^\lambda}{dt}+\xi_\lambda\frac{\delta}{\delta t}\frac{dx^\lambda}{dt}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\nabla_\mu\xi_\lambda+\nabla_\lambda\xi_\mu\right)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}=0$$

故$\langle X, \dot{c}\rangle$在 c 上一定。

注意． 如 t 不是仿射参数，则一般并不成立。

17. E^n 的并进开玲向量具有

$$\xi^\lambda=a_\mu{}^\lambda x^\mu+b^\lambda,\quad a_\mu{}^\lambda=-a_\lambda{}^\mu$$

的形状（黎曼几何§16例2）．然因

$$\|X\|^2=\sum\xi^\lambda\xi^\lambda=\text{一定}$$

$$\sum \xi^\lambda \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\mu} = 0.$$

因此在任意点$\sum(a_\alpha{}^\lambda x^\alpha + b^\lambda)a_\mu{}^\lambda = 0$ 成立，故

$$\sum_\lambda a_\alpha{}^\lambda a_\mu{}^\lambda = 0。$$

令 $\alpha = \mu$，则得$\sum_\lambda (a_\alpha{}^\lambda)^2 = 0$。即 $a_\alpha{}^\lambda = 0$。于是得

$$\xi^\lambda = b^\lambda.$$

X生成的并进变换通过解

$$\frac{dx^\lambda}{dt} = b^\lambda$$

得从$\{c^\lambda\}$到$\{x^\lambda\}$的平行移动 $x^\lambda = b^\lambda t + c^\lambda$。

18. 因开玲向量是仿射开玲向量，故由第5题知

$$\mathcal{L}_X R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa = 0，\ \mathcal{L}_X R_{\mu\nu} = 0.$$

另外，因X是开玲向量，故

$$\mathcal{L}_X g^{\lambda\mu} = 0$$

成立.原因是在 $g^{\lambda\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta_\nu{}^\lambda$ 的两边以$\mathcal{L}_X$ 作用之，则得$(\mathcal{L}_X g^{\lambda\alpha})g_{\alpha\nu} = 0$ 再与 $g^{\nu\mu}$ 作积和即可。

又因 $R = g^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu}$，故

$$\mathcal{L}_X R = (\mathcal{L}_X g^{\lambda\mu})R_{\lambda\mu} + g^{\lambda\mu}\mathcal{L}_X R_{\lambda\mu} = 0$$

在 $X = (\xi^\lambda)$的轨道上

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dx^\lambda}{dt}\frac{\partial R}{\partial x^\lambda} = \xi^\lambda \frac{\partial R}{\partial x^\lambda} = \mathcal{L}_X R = 0$$

同理得

$$\frac{d(R_{\lambda\mu}R^{\lambda\mu})}{dt} = \mathcal{L}_X(R_{\lambda\mu}R^{\lambda\mu}) = \mathcal{L}_X(g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}R_{\lambda\mu}R_{\alpha\beta}) = 0.$$

19.
$$\mathcal{L}_{aX+bY}g = a\mathcal{L}_X g + b\mathcal{L}_Y g = 0,$$
$$\mathcal{L}_{[X,Y]}g = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y g - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X g = 0.$$

20. 由第 18 题知，关于开玲向量 $X = (\xi^\lambda)$，

$$\mathcal{L}_X R = \xi^\alpha \frac{\partial R}{\partial x^\alpha} = 0$$

在一点 p 考虑之，对于任意的 $A=(\xi^\lambda)$ 上式成立，故 $\partial R/\partial x^\alpha=0$。因点 p 任意，故 R 为常数。

21．由§7例题2可见，$X=(\xi^\lambda)$ 在 TM 上的开拓 $Z=(\zeta^A)$ 由

$$\zeta^\lambda=\xi^\lambda,\qquad \zeta^{n+\lambda}=\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^\alpha}y^\alpha$$

而定．计算

$$\mathcal{L}_Z\eta_A=\zeta^B\frac{\partial\eta_A}{\partial x^B}+\eta_B\frac{\partial\zeta^B}{\partial x^A}$$

得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Z\eta_\lambda&=\zeta^B\frac{\partial\eta_\lambda}{\partial x^B}+\eta_B\frac{\partial\zeta^B}{\partial x^\lambda}\\&=\xi^\mu\frac{\partial\eta_\lambda}{\partial x^\mu}+\zeta^{n+\mu}\frac{\partial\eta_\lambda}{\partial y^\mu}+\eta_\mu\frac{\partial\zeta^\mu}{\partial x^\lambda}\\&=\xi^\mu\frac{\partial(g_{\lambda\alpha}y^\alpha)}{\partial x^\mu}+\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\alpha}y^\alpha\frac{\partial(g_{\lambda\beta}y^\beta)}{\partial y^\mu}+g_{\mu\alpha}y^\alpha\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\lambda}\\&=\left(\xi^\mu\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu}+g_{\lambda\mu}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\alpha}+g_{\mu\alpha}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\lambda}\right)y^\alpha\\&=(\mathcal{L}_Xg_{\lambda\alpha})y^\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Z\eta_{n+\lambda}&=\zeta^B\frac{\partial\eta_{n+\lambda}}{\partial x^B}+\eta_B\frac{\partial\zeta^B}{\partial x^{n+\lambda}}\\&=0+\eta_\mu\frac{\partial\zeta^\mu}{\partial y^\lambda}+0=\eta_\mu\frac{\partial\zeta^\mu}{\partial y^\lambda}=0\end{aligned}$$

故 $\mathcal{L}_Z\eta_A=0$ 与 $\mathcal{L}_Xg_{\lambda\alpha}=0$ 等价．

注意．$\mathcal{L}_Z\eta_A$ 是共变向量 $\eta=(\eta_A)$ 的李导数的 A 分量，故应写做 $(\mathcal{L}_Z\eta)_A$。因此在上列证明中 $\mathcal{L}_Z\eta_\lambda$ 不是 η_λ 的李导数。

22．由(17.9)知

$$\overset{*}{L}_{\mu\nu}=L_{\mu\nu}-(n-2)\rho_{\mu\nu}\tag{1}$$

故

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{L}_{\mu\nu} = \frac{\partial \overset{*}{L}_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \overset{*}{L}_{\varepsilon\nu} \left\{ {\varepsilon \atop \lambda\mu} \right\}^* - \overset{*}{L}_{\mu\varepsilon} \left\{ {\varepsilon \atop \lambda\nu} \right\}^*$$

$$= \frac{\partial \overset{*}{L}_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \overset{*}{L}_{\varepsilon\nu} \left(\left\{ {\varepsilon \atop \lambda\mu} \right\} + \rho_\lambda \delta_\mu^\varepsilon + \rho_\mu \delta_\lambda^\varepsilon - \rho^\varepsilon g_{\lambda\mu} \right)$$

$$- \overset{*}{L}_{\mu\varepsilon} \left(\left\{ {\varepsilon \atop \lambda\nu} \right\} + \rho_\lambda \delta_\nu^\varepsilon + \rho_\nu \delta_\lambda^\varepsilon - \rho^\varepsilon g_{\lambda\nu} \right)$$

$$= \nabla_\lambda \overset{*}{L}_{\mu\nu} - \overset{*}{L}_{\mu\nu}\rho_\lambda - \overset{*}{L}_{\lambda\nu}\rho_\mu + \rho^\varepsilon \overset{*}{L}_{\varepsilon\nu} g_{\lambda\mu}$$
$$- \overset{*}{L}_{\mu\nu}\rho_\lambda - \overset{*}{L}_{\mu\lambda}\rho_\nu + \rho^\varepsilon \overset{*}{L}_{\mu\varepsilon} g_{\lambda\nu}$$

由此得

$$\overset{*}{C}_{\lambda\mu\nu} = \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{L}_{\mu\nu} - \overset{*}{\nabla}_\mu \overset{*}{L}_{\lambda\nu}$$
$$= \nabla_\lambda \overset{*}{L}_{\mu\nu} - \nabla_\mu \overset{*}{L}_{\lambda\nu} - \overset{*}{L}_{\mu\nu}\rho_\lambda + \overset{*}{L}_{\lambda\nu}\rho_\mu + \rho^\varepsilon \overset{*}{L}_{\mu\varepsilon} g_{\lambda\nu} - \rho^\varepsilon \overset{*}{L}_{\lambda\varepsilon} g_{\mu\nu}$$

将(1) 代入之得

$$\overset{*}{C}_{\lambda\mu\nu} = C_{\lambda\mu\nu} - L_{\mu\nu}\rho_\lambda + L_{\lambda\nu}\rho_\mu + \rho^\varepsilon L_{\mu\varepsilon} g_{\lambda\nu} - \rho^\varepsilon L_{\lambda\varepsilon} g_{\mu\nu} \qquad (2)$$
$$-(n-2)\{\nabla_\lambda \rho_{\mu\nu} - \nabla_\mu \rho_{\lambda\nu} - \rho_{\mu\nu}\rho_\lambda + \rho_{\lambda\nu}\rho_\mu + \rho^\varepsilon \rho_{\mu\varepsilon} g_{\lambda\nu} - \rho^\varepsilon \rho_{\lambda\varepsilon} g_{\mu\nu}\}.$$

另一方面，因

$$\rho_{\mu\nu} = \nabla_\mu \rho_\nu - \rho_\mu \rho_\nu + \frac{1}{2} \rho^\varepsilon \rho_\varepsilon g_{\mu\nu} \qquad (3)$$

故

$$\nabla_\lambda \rho_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \nabla_\mu \rho_\nu - \nabla_\lambda \rho_\mu \rho_\nu - \rho_\mu \nabla_\lambda \rho_\nu + \rho^\varepsilon \nabla_\lambda \rho_\varepsilon g_{\mu\nu}.$$

将(3)代入右边，交换 λ，μ 并相减得

$$\nabla_\lambda \rho_{\mu\nu} - \nabla_\mu \rho_{\lambda\nu} = -R_{\lambda\mu\nu}{}^\varepsilon \rho_\varepsilon - \rho_\mu \rho_{\lambda\nu} + \rho_\lambda \rho_{\mu\nu} + \rho^\varepsilon(\rho_{\lambda\varepsilon} g_{\mu\nu} - \rho_{\mu\varepsilon} g_{\lambda\nu}).$$

将此式代入(2)得

$$\overset{*}{C}_{\lambda\mu\nu} = C_{\lambda\mu\nu} + (n-2)\Big\{R_{\lambda\mu\nu}{}^\varepsilon + \frac{1}{n-2}(L_{\lambda\nu}\delta_\mu^\varepsilon - L_{\mu\nu}\delta_\lambda^\varepsilon + g_{\lambda\nu}L_\mu{}^\varepsilon -$$
$$- g_{\mu\nu}L_\lambda{}^\varepsilon)\Big\}\rho_\varepsilon = C_{\lambda\mu\nu} + (n-2)C_{\lambda\mu\nu}{}^\varepsilon \rho_\varepsilon$$

23. 根据(17.10)

$$C_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} + \frac{1}{n-2}\Big(L_{\mu\alpha}\delta_\nu{}^{\beta} - L_{\nu\alpha}\delta_\mu{}^{\beta} + $$

$$+ g_{\mu\alpha}L_\nu{}^{\beta} - g_{\nu\alpha}L_\mu{}^{\beta}\Big)$$

故

$$\nabla_\lambda C_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = \nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} + \frac{1}{n-2}(\nabla_\lambda L_{\mu\alpha}\delta_\nu{}^{\beta} - \nabla_\lambda L_{\nu\alpha}\delta_\mu{}^{\beta} \tag{1}$$

$$+ g_{\mu\alpha}\nabla_\lambda L_\nu{}^{\beta} - g_{\nu\alpha}\nabla_\lambda L_\mu{}^{\beta}).$$

关于 λ 与 β 缩短之得

$$\nabla_\varepsilon C_{\mu\nu\alpha}{}^{\varepsilon} = \nabla_\varepsilon R_{\mu\nu\alpha}{}^{\varepsilon} + \frac{1}{n-2}(\nabla_\nu L_{\mu\alpha} - \nabla_\mu L_{\nu\alpha} + $$

$$+ g_{\mu\alpha}\nabla_\varepsilon L_\nu{}^{\varepsilon} - g_{\nu\alpha}\nabla_\varepsilon L_\mu{}^{\varepsilon}) \tag{2}$$

然由(13.9)知

$$\nabla_\varepsilon R_{\mu\nu\alpha}{}^{\varepsilon} = \nabla_\mu R_{\nu\alpha} - \nabla_\nu R_{\mu\alpha},$$

又因

$$L_\mu{}^{\varepsilon} = R_\mu{}^{\varepsilon} - \frac{R}{2(n-1)}\delta_\mu{}^{\varepsilon}$$

故

$$\nabla_\varepsilon L_\mu{}^{\varepsilon} = \nabla_\varepsilon R_\mu{}^{\varepsilon} - \frac{1}{2(n-1)}\nabla_\mu R.$$

根据(13.10)得 $\nabla_\mu R = 2\nabla_\varepsilon R_\mu{}^{\varepsilon}$，从而

$$\nabla_\varepsilon L_\mu{}^{\varepsilon} = \frac{n-2}{2(n-1)}\nabla_\mu R.$$

将这些结果代入(2)得

$$\nabla_\varepsilon C_{\mu\nu\alpha}{}^{\varepsilon} = \nabla_\mu R_{\nu\alpha} - \nabla_\nu R_{\mu\alpha} + \frac{1}{n-2}(\nabla_\nu L_{\mu\alpha} - \nabla_\mu L_{\nu\alpha})$$

$$+ \frac{1}{2(n-1)}(g_{\mu\alpha}\nabla_\nu R - g_{\nu\alpha}\nabla_\mu R)$$

$$=\nabla_\mu L_{\nu\alpha}-\nabla_\nu L_{\mu\alpha}-\frac{1}{n-2}(\nabla_\mu L_{\nu\alpha}-\nabla_\nu L_{\mu\alpha})=\frac{n-3}{n-2}C_{\mu\nu\alpha}$$

24. 当 $n=2$ 时，$R_{\lambda\mu}=(R/2)g_{\lambda\mu}$ 恒成立（参照习题三第 43题）故 $L_{\mu\nu}=0$，$C_{\lambda\mu\nu}=\nabla_\lambda L_{\mu\nu}-\nabla_\mu L_{\lambda\nu}=0$。

25. 根据第23题题解之（1）式，比安基恒等式及$C_{\lambda\mu\nu}$ 的定义。

26. $\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}^*=\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}+\rho_\mu\delta_\nu^\lambda+\rho_\nu\delta_\mu^\lambda-\rho^\lambda g_{\mu\nu}$ 关于λ与 ν 缩短得$\left\{\begin{matrix}\varepsilon\\ \mu\varepsilon\end{matrix}\right\}^*$

$=\left\{\begin{matrix}\varepsilon\\ \mu\varepsilon\end{matrix}\right\}+n\rho_\mu$。由此得

$$\rho_\mu=\frac{1}{n}\left(\left\{\begin{matrix}\varepsilon\\ \mu\varepsilon\end{matrix}\right\}^*-\left\{\begin{matrix}\varepsilon\\ \mu\varepsilon\end{matrix}\right\}\right).$$

注意 $\rho^\lambda g_{\mu\nu}=\rho_a g^{a\lambda}g_{\mu\nu}=\rho_a \overset{*}{g}{}^{a\lambda}\overset{*}{g}_{\mu\nu}$ 并消去 ρ_μ，ρ_ν，ρ^λ 可得 $\overset{*}{K}{}_\mu{}^\lambda{}_\nu=K_\mu{}^\lambda{}_\nu$.

注意。$K_\mu{}^\lambda{}_\nu$ 既不是仿射联络也不是张量。

27. 因 $C_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa=0$，故

$$(n-2)R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa=-(R_{\lambda\nu}\delta_\mu^\kappa-R_{\mu\nu}\delta_\lambda^\kappa+g_{\lambda\nu}R_\mu{}^\kappa-g_{\mu\nu}R_\lambda{}^\kappa)$$

$$+\frac{R}{n-1}(g_{\lambda\nu}\delta_\mu^\kappa-g_{\mu\nu}\delta_\lambda^\kappa). \qquad (1)$$

将 $R_{\lambda\nu}=(R/n)g_{\lambda\nu}$ 代入之得

$$(n-2)R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa=\left(-\frac{2R}{n}+\frac{R}{n-1}\right)(g_{\lambda\nu}\delta_\mu^\kappa-g_{\mu\nu}\delta_\lambda^\kappa)$$

$$=-\frac{(n-2)R}{n(n-1)}(g_{\lambda\nu}\delta_\mu^\kappa-g_{\mu\nu}\delta_\lambda^\kappa)$$

28. 使用习题三第 46 题题解的记号。设 $M^n=M^r\times M^s$ 是共形平坦，则前题题解的（1）成立。在（1）里，令 $\lambda=i$，$\mu=b$，$\nu=j$，$\kappa=c$ 则得

$$0=(n-2)R_{ibj}{}^{c}=-(R_{ij}\delta_b{}^c+g_{ij}R_b{}^c)+\frac{R}{n-1}g_{ij}\delta_b{}^c,$$

与 g^{ij} 作积和得

$$R_b{}^c=\left(\frac{R}{n-1}-\frac{R_1}{r}\right)\delta_b{}^c,\ b,c=r+1,\cdots,r+s(=n)。\quad (2)$$

关于 b，c缩短得

$$\frac{R}{n-1}=\frac{R_1}{r}+\frac{R_2}{s}\quad (3)$$

故(2)变为

$$R_{bc}=\frac{R_2}{s}\delta_{bc}$$

因此 M^s 为爱因斯坦空间。同理 M^r 也是爱因斯坦空间。

由习题三第 32 题知 $R=R_1+R_2$，故从(3)消去R可得

$$\frac{R_1}{r(r-1)}+\frac{R_2}{s(s-1)}=0\quad (4)$$

在(1)里令 $\lambda=i$，$\mu=j$，$\nu=k$，$\kappa=l$，则

$$(n-2)R_{ijk}{}^l=-(R_{ik}\delta_j{}^l-R_{jk}\delta_i{}^l+g_{ik}\delta_j{}^l-g_{jk}R_i{}^l)$$
$$+\frac{R}{n-1}(g_{ik}\delta_j{}^l-g_{jk}\delta_i{}^l)$$

故将 $R_{ik}=(R_1/r)g_{ik}$ 代入之得

$$(n-2)R_{ijk}{}^l=\left(\frac{R}{n-1}-\frac{2R_1}{r}\right)(g_{ik}\delta_j{}^l-g_{jk}\delta_i{}^l)。$$

然由(3)，(4)知

$$\frac{R}{n-1}-\frac{2R_1}{r}=\frac{R_2}{s}-\frac{R_1}{r}$$

$$=-\left(\frac{s-1}{r(r-1)}+\frac{1}{r}\right)R_1=-\frac{n-2}{r(r-1)}R_1$$

故

$$R_{ijk}{}^{l} = -\frac{R_1}{r(r-1)}(g_{ik}\delta_j{}^l - g_{jk}\delta_i{}^l)$$

可见 M^r 为常曲率空间，关于 M^s 也一样。反之，如 M^r，M^s 都是常曲率空间并满足(4)，则可验证(1)式成立。

29. 在共形对应下(17.5)，(17.7)：

$$\overset{*}{R}_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa} = R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa} + \rho_{\lambda\nu}\delta_\mu{}^\kappa - \rho_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\kappa + g_{\lambda\nu}\rho_\mu{}^\kappa - g_{\mu\nu}\rho_\lambda{}^\kappa,$$

$$e^{2\rho}\overset{*}{R} = R - 2(n-1)\rho_\alpha{}^\alpha$$

成立，故

$$\overset{*}{Z}_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa} = \overset{*}{R}_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa} + \frac{\overset{*}{R}}{n(n-1)}(\overset{*}{g}_{\lambda\nu}\delta_\mu{}^\kappa - \overset{*}{g}_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\kappa)$$

$$= R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa} + \rho_{\lambda\nu}\delta_\mu{}^\kappa - \rho_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\kappa + g_{\lambda\nu}\rho_\mu{}^\kappa - g_{\mu\nu}\rho_\lambda{}^\kappa$$

$$+\left(\frac{R}{n(n-1)} - \frac{2}{n}\rho_\alpha{}^\alpha\right)(g_{\lambda\nu}\delta_\mu{}^\kappa - g_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\kappa)$$

因此 $\overset{*}{Z}_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa} = Z_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}$ 的充要条件是

$$\rho_{\lambda\nu}\delta_\mu{}^\kappa - \rho_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\kappa + g_{\lambda\nu}\rho_\mu{}^\kappa - g_{\mu\nu}\rho_\lambda{}^\kappa$$

$$= \frac{2}{n}\rho_\alpha{}^\alpha(g_{\lambda\nu}\delta_\mu{}^\kappa - g_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\kappa) \qquad (1)$$

关于 μ 与 κ 缩短之得

$$(n-2)\rho_{\lambda\nu} = \frac{n-2}{n}\rho_\alpha{}^\alpha g_{\lambda\nu}$$

由此可得

$$\rho_{\lambda\nu} = \sigma g_{\lambda\nu}, \qquad \sigma = (1/n)\rho_\alpha{}^\alpha. \qquad (2)$$

反之，如(2)成立，则(1)成立，故 $Z_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}$ 保持不变。

30. 在共形对应下(17.6)：

$$\overset{*}{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (n-2)\rho_{\mu\nu} - \rho_\alpha{}^\alpha g_{\mu\nu}$$

成立。因 $R_{\mu\nu}=(R/n)g_{\mu\nu}$，故 $\overset{*}{g}$ 为爱因斯坦空间与存在 σ 使得 $\rho_{\mu\nu}=\sigma g_{\mu\nu}$ 等价。

31. (i)
$$\mathscr{L}_{aX+bY}g=a\mathscr{L}_Xg+b\mathscr{L}_Yg$$
$$=2a\rho_Xg+2b\rho_Yg=2(a\rho_X+b\rho_Y)g,$$
$$\therefore\qquad \rho_{aX+bY}=a\rho_X+b\rho_Y.$$

(ii)
$$\mathscr{L}_{[X,Y]}g=\mathscr{L}_X\mathscr{L}_Yg-\mathscr{L}_Y\mathscr{L}_Xg=\mathscr{L}_X(2\rho_Yg)-\mathscr{L}_Y(2\rho_Xg)$$
$$=2\{(\mathscr{L}_X\rho_Y)g+\rho_Y\mathscr{L}_Xg-(\mathscr{L}_Y\rho_X)g-\rho_X\mathscr{L}_Yg\}$$
$$=2(\mathscr{L}_X\rho_Y-\mathscr{L}_Y\rho_X)g,$$
$$\therefore\qquad \rho_{[X,Y]}=\mathscr{L}_X\rho_Y-\mathscr{L}_Y\rho_X=X\rho_Y-Y\rho_X.$$

(iii)
$$[a\rho_X+b\rho_Y,\ \rho_Z]=[\rho_{aX+bY},\ \rho_Z]=\rho_{[aX+bY,Z]}$$
$$=\rho_{a[X,Z]+b[Y,Z]}=a\rho_{[X,Z]}+b\rho_{[Y,Z]}$$
$$=a[\rho_X,\rho_Z]+b[\rho_Y,\rho_Z]$$
$$[\rho_X,\rho_Y]=\rho_{[X,Y]}=\rho_{-[Y,X]}=-[\rho_Y,\rho_X]$$

又因 $[\rho_X,[\rho_Y,\rho_Z]]=[\rho_X,\rho_{[Y,Z]}]=\rho_{[X,[Y,Z]]}$，故
$$[\rho_X,[\rho_Y,\rho_Z]]+[\rho_Y,[\rho_Z,\rho_X]]+[\rho_Z,[\rho_X,\rho_Y]]$$
$$=\rho_{[X,[Y,Z]]}+\rho_{[Y,[Z,X]]}+\rho_{[Z,[X,Y]]}$$
$$=\rho_{[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]}=\rho_0=0.$$

32. $\mathscr{L}_XC_{\lambda\mu\nu}=\mathscr{L}_X(\nabla_\lambda L_{\mu\nu}-\nabla_\mu L_{\lambda\nu})$。然由第 4 题(iii)知
$$\mathscr{L}_X\nabla_\lambda L_{\mu\nu}=\nabla_\lambda\mathscr{L}_XL_{\mu\nu}-L_{\alpha\nu}\mathscr{L}_X\left\{{\alpha\atop \lambda\mu}\right\}-L_{\mu\alpha}\mathscr{L}_X\left\{{\alpha\atop \lambda\nu}\right\}$$

故
$$\mathscr{L}_XC_{\lambda\mu\nu}=\nabla_\lambda\mathscr{L}_XL_{\mu\nu}-\nabla_\mu\mathscr{L}_XL_{\lambda\nu}-L_{\mu\alpha}\mathscr{L}_X\left\{{\alpha\atop \lambda\nu}\right\}+L_{\lambda\alpha}\mathscr{L}_X\left\{{\alpha\atop \mu\nu}\right\}.$$

因为 X 为共形开玲向量，所以
$$\mathscr{L}_X\left\{{\alpha\atop \lambda\nu}\right\}=\rho_\lambda\delta_\nu{}^\alpha+\rho_\nu\delta_\lambda{}^\alpha-\rho^\alpha g_{\lambda\nu}$$
$$\mathscr{L}_XL_{\mu\nu}=-(n-2)\nabla_\mu\rho_\nu\qquad \because(17.33)$$

成立。从而
$$\mathscr{L}_XC_{\lambda\mu\nu}=-(n-2)(\nabla_\lambda\nabla_\mu\rho_\nu-\nabla_\mu\nabla_\lambda\rho_\nu)$$

$$- L_{\mu\alpha}(\rho_\lambda \delta_\nu{}^\alpha + \rho_\nu \delta_\lambda{}^\alpha - \rho^\alpha g_{\lambda\nu})$$
$$+ L_{\lambda\alpha}(\rho_\mu \delta_\nu{}^\alpha + \rho_\nu \delta_\mu{}^\alpha - \rho^\alpha g_{\mu\nu})$$
$$= (n-2) C_{\lambda\mu\nu}{}^\alpha \rho_\alpha.$$

33. 设 $x = x^1$，$y = x^2$，则在 E^2 上

$$\nabla_\lambda = \partial/\partial x^\lambda, \quad g_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}, \quad \xi^\lambda = \xi_\lambda.$$

因 $X = (\xi^\lambda)$ 为共形开玲向量的条件：

$$\nabla_\lambda \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\lambda = 2\rho g_{\lambda\mu}$$

变为

$$\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x^\mu} = 2\rho \delta_{\lambda\mu},$$

故设 $\lambda = \mu = 1$；$\lambda = \mu = 2$；$\lambda = 1$，$\mu = 2$ 可得

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \rho = \frac{\partial \xi_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = 0$$

其逆显然。

34. 因 $\dot{c} = X = (\xi^\lambda)$，故

$$\nabla_{\dot{c}} f = \xi^\alpha \nabla_\alpha (\xi^\mu \xi_\mu) = 2\xi^\alpha \xi^\mu \nabla_\alpha \xi_\mu = \xi^\alpha \xi^\mu (\nabla_\alpha \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\alpha)$$
$$= 2\rho g_{\alpha\mu} \xi^\alpha \xi^\mu = 2\rho f.$$

如 f 在 p_0 处取最大值，则从 $(\nabla_{\dot{c}} f)_{p_0} = 0$ 得 $\rho(p_0) = 0$。

35. 从(17.33)知

$$\mathcal{L}_\xi L_{\mu\nu} = -(n-2) \nabla_\mu \rho_\nu. \qquad (1)$$

然而在爱因斯坦空间

$$L_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2(n-1)} g_{\mu\nu} = \frac{(n-2)R}{2n(n-1)} g_{\mu\nu}$$

故(1)变为

$$\frac{R}{2n(n-1)} \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \rho_\nu$$

即

$$\frac{R}{2n(n-1)} (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu \rho_\nu + \nabla_\nu \rho_\mu).$$

令

$$\zeta_\lambda = -\frac{n(n-1)}{R}\rho_\lambda, \quad \eta_\lambda = \xi_\lambda - \zeta_\lambda,$$

移项上式得 $\nabla_\mu \eta_\nu + \nabla_\nu \eta_\mu = 0$。唯一性与§18 例题2的论证一样。

36. (i) 从前题可见 $L \subset L_1 + L_2$ 显然。反之设 $Y \in L_1$, $Z \in L_2$, 则得 $\mathscr{L}_{Y+Z} g = \mathscr{L}_Y g + \mathscr{L}_Z g = \mathscr{L}_Z g$, 故 $Y + Z \in L$, 根据前题的唯一性知 $L_1 \cap L_2 = \{0\}$。因此 L 为 L_1 与 L_2 的直和。

(ii) 因 L_1 作成李代数，故如 X_1, $X_2 \in L_1$, 则 $[X_1, X_2] \in L_1$

(iii) 设 $X = (\xi^\lambda) \in L_1$, $Y = (\eta^\lambda) \in L_2$, 则

$$\nabla_\lambda \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\lambda = 0, \qquad \nabla_\lambda \eta_\mu = \nabla_\mu \eta_\lambda$$

故 $[X, Y]$ 的共变分量为

$$\xi^\alpha \nabla_\alpha \eta_\lambda - \eta^\alpha \nabla_\alpha \xi_\lambda = \xi^\alpha \nabla_\lambda \eta_\alpha + \eta^\alpha \nabla_\lambda \xi_\alpha = \nabla_\lambda (\xi^\alpha \eta_\alpha)$$

即梯度。另外因 $X \in L$, $Y \in L$, 故 $[X, Y] \in L$. $\therefore$ $[X, Y] \in L_2$。

(iv) 设 $X = (\phi^\lambda) \in L_2$, 则存在满足 $\mathscr{L}_X g = 2\rho g$ 的函数 ρ. 由前题知

$$\phi_\lambda = a\rho_\lambda, \quad a = -\frac{n(n-1)}{R}$$

成立。对于 $Y = (\psi^\lambda) \in L_2$ 同理得

$$\mathscr{L}_Y g = 2\sigma g, \quad \psi_\lambda = a\sigma_\lambda$$

故

$$\mathscr{L}_{[X,Y]} g = \mathscr{L}_X \mathscr{L}_Y g - \mathscr{L}_Y \mathscr{L}_X g = \mathscr{L}_X (2\sigma g) - \mathscr{L}_Y (2\rho g)$$
$$= 2(\mathscr{L}_X \sigma - \mathscr{L}_X \rho) g.$$

然而

$$\mathscr{L}_X \sigma - \mathscr{L}_Y \rho = X\sigma - Y\rho = \phi^\alpha \sigma_\alpha - \psi^\alpha \rho_\alpha = a\rho^\alpha \sigma_\alpha - a\sigma^\alpha \rho_\alpha = 0.$$

$\therefore$ $\mathscr{L}_{[X,Y]} g = 0$, 故 $[X, Y] \in L_1$。

37. 使用§17 例题2的记号。因为 E^n 的相似变换 ϕ_t 是

$$\phi_t: \ y = (y^1, \cdots, y^n) \to \phi_t(y) = (e^t y_1, \cdots, e^t y_n)$$

故 $\{\phi_t\}$ 在 E^n 上诱导的向量场 Y 是

$$Y = \left(\frac{d\phi_t(y)}{dt}\right)_{t=0} = (y^1, \cdots, y^n) = y.$$

$\{\psi_t\} = \{\phi^{-1} \circ \phi_t \circ \phi\}$ 诱导在 $S^n(k)$ 上的向量场 $X = (\xi^\alpha)$ 满足 $Y = \phi_*(X)$,

故从
$$y^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^b}\xi^b \tag{1}$$
求 ξ^b 即可。由§17 例题2知
$$y^a = \frac{kx^a}{k-x^{n+1}}$$
故
$$\frac{\partial y^a}{\partial x^b} = k\left(\frac{\delta_b{}^a}{k-x^{n+1}} - \frac{x^a x^b}{x^{n+1}(k-x^{n+1})^2}\right).$$
因此(1)变为下式。
$$\frac{kx^a}{k-x^{n+1}} = k\left(\frac{\xi^a}{k-x^{n+1}} - \frac{x^a}{x^{n+1}(k-x^{n+1})^2}\sum x^b\xi^b\right).$$
于是
$$x^a = \xi^a - \frac{x^a}{x^{n+1}(k-x^{n+1})}\sum x^b\xi^b. \tag{2}$$
为求出$\sum x^b\xi^b$，(2)式乘以 x^a 并关于 a 求和，则
$$\sum x^a x^a = \left(1 - \frac{\sum x^a x^a}{x^{n+1}(k-x^{n+1})}\right)\sum x^b\xi^b = -\frac{k}{x^{n+1}}\sum x^b\xi^b$$
$$\therefore \quad \sum x^b\xi^b = -\frac{x^{n+1}}{k}\sum x^a x^a = -\frac{x^{n+1}}{k}(k^2-(x^{n+1})^2)$$
代入(2)式得
$$x^a = \xi^a + \frac{x^a}{k}(k+x^{n+1})$$
$$\xi^a = x^a\left(1-\frac{k+x^{n+1}}{k}\right) = -\frac{x^{n+1}x^a}{k}$$
注意。 $\nabla_b\xi_c = -(x^{n+1}/k)g_{bc}$ 成立。

38. 考虑它们的北半球。$S^n(1)$的点用 x^a，$S^n(k)$的点用 $\bar{x}^a$ 表示之，则
$$g_{ab}(x) = \delta_{ab} + \frac{x^a x^b}{(x^{n+1})^2},\quad \bar{g}_{ab}(\bar{x}) = \delta_{ab} + \frac{\bar{x}^a\bar{x}^b}{(\bar{x}^{n+1})^2}.$$

设$\Phi(\bar{g})=\overset{*}{g}$，则$\bar{x}^a==kx^a$，$\bar{x}^{n+1}=kx^{n+1}$，故

$$\overset{*}{g}_{ab}(x)=\frac{\partial\bar{x}^c}{\partial x^a}\ \frac{\partial\bar{x}^d}{\partial x^b}\bar{g}_{cd}(\bar{x})=k^2\delta_a{}^c\delta_b{}^d\bar{g}_{cd}(\bar{x})=k^2\bar{g}_{ab}(\bar{x})$$

$$=k^2g_{ab}(x).$$

因此ϕ是相似变换。

39. (i)
$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$
$$=\sin^2u\,du^2+dv^2.$$

(ii) 从
$$\sin^2\bar{v}=\sigma^2\sin^2v,\quad d\bar{v}^2=\sigma^2dv^2$$

消去σ得

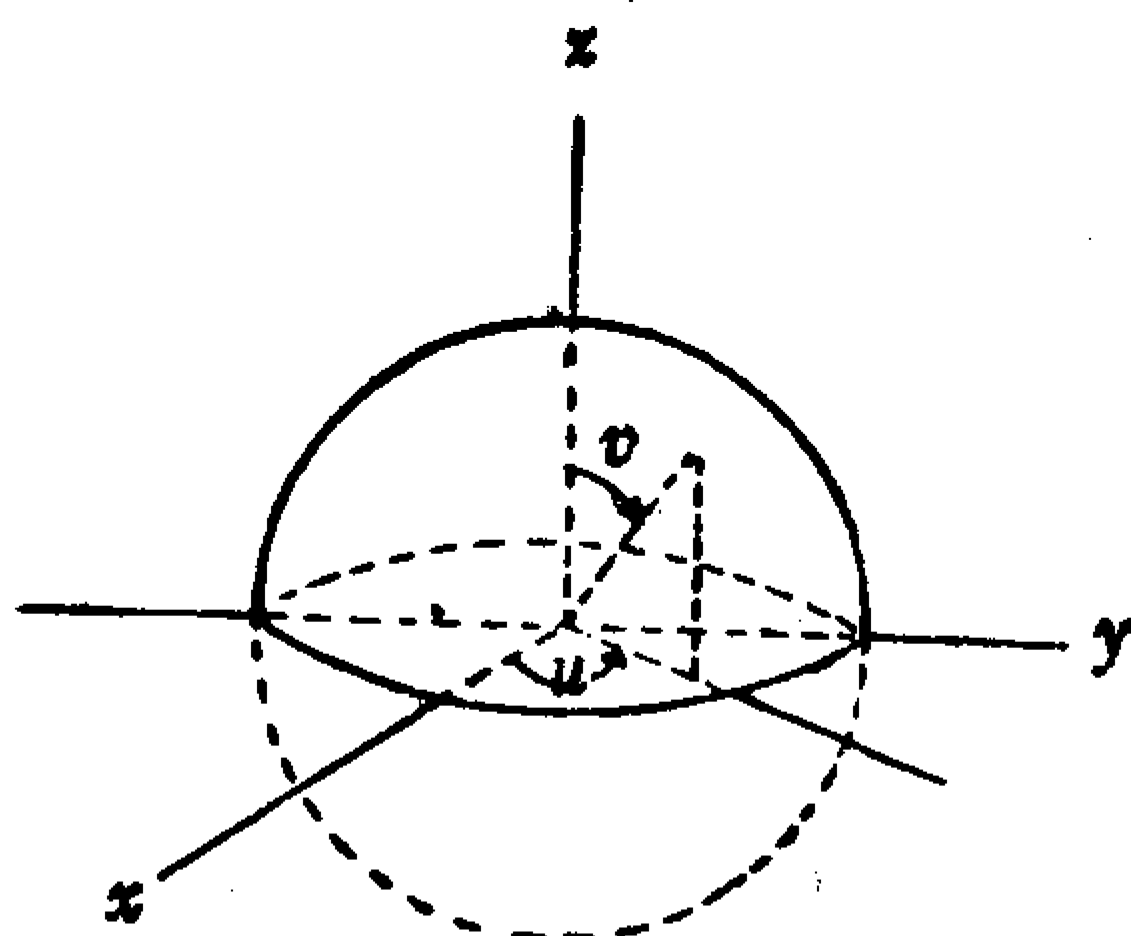


图 9

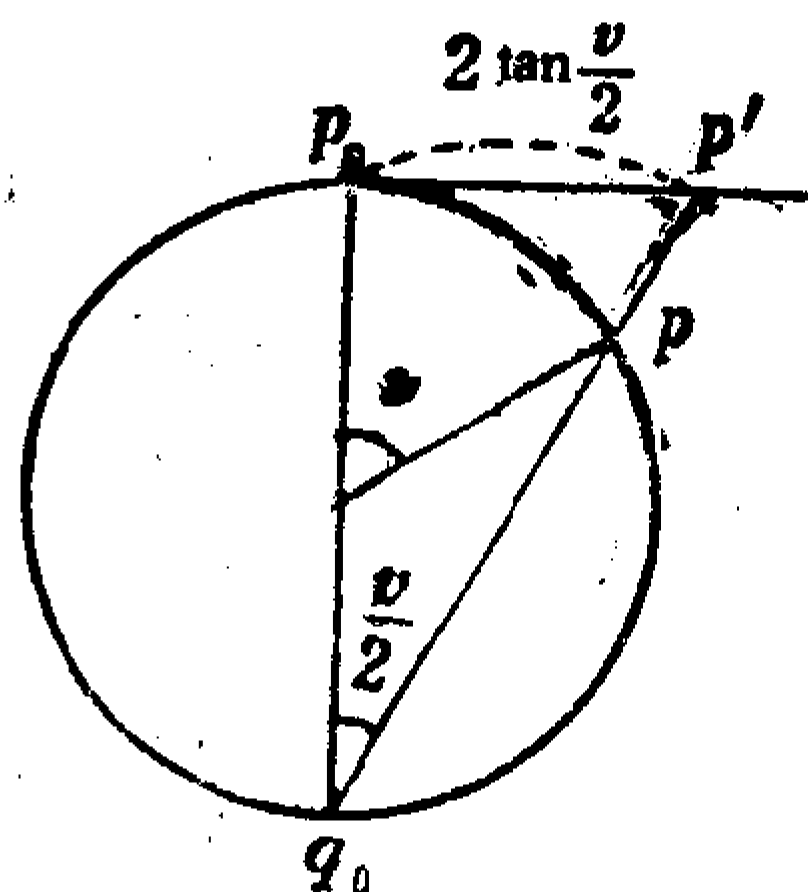


图 10

$$\frac{d\bar{v}}{\sin\bar{v}}=\pm\frac{dv}{\sin v}.$$

积分之得

$$\log\left|\tan\frac{\bar{v}}{2}\right|=\pm\log\left|\tan\frac{v}{2}\right|+C$$

故得

$$\tan\frac{v}{2}\tan\frac{\bar{v}}{2}=C \qquad (1)$$

或

$$\tan\frac{\bar{v}}{2}=C\tan\frac{v}{2}. \qquad (2)$$

注意 从南极 q_0 向北极 p_0 处的球的切平面射影设为 ϕ。(1)是将 E^n 上以 p_0 为中心的反演，(2)是将 E^n 的相似变换，用 ϕ 变到 S^2 上。

40. 因为 $g_{\lambda\mu}=f^{-2}\delta_{\lambda\mu}$，$g^{\lambda\mu}=f^2\delta_{\lambda\mu}$，故令 $f_\lambda=\partial f/\partial x^\lambda$ 计算之得

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=-f^{-1}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x^\lambda}\delta_{\mu\kappa}-\frac{\partial f_\kappa}{\partial x^\lambda}\delta_{\mu\nu}-\frac{\partial f_\nu}{\partial x^\mu}\delta_{\lambda\kappa}+\frac{\partial f_\kappa}{\partial x^\mu}\delta_{\lambda\nu}\right)$$

$$+f^{-2}\sum_\alpha f_\alpha^2(\delta_{\mu\kappa}\delta_{\lambda\nu}-\delta_{\lambda\kappa}\delta_{\mu\nu}). \qquad (1)$$

另一方面，因为是常曲率空间，所以

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=-k(g_{\lambda\nu}\delta_\mu{}^\kappa-g_{\mu\nu}\delta_\lambda{}^\kappa)=-kf^{-2}(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\kappa}-\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\kappa}) \quad (2)$$

从(1)，(2)得

$$f^{-2}(k+\sum f_\alpha^2)(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\kappa}-\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\kappa})$$

$$=f^{-1}\left(\frac{\partial f_\nu}{\delta x^\lambda}\delta_{\mu\kappa}-\frac{\partial f_\kappa}{\delta x^\lambda}\delta_{\mu\nu}-\frac{\partial f_\nu}{\partial x^\mu}\delta_{\lambda\kappa}+\frac{\partial f_\kappa}{\partial x^\mu}\delta_{\lambda\nu}\right)$$

令 $\lambda=\nu$ 并求和得

$$\left(k+\sum_\alpha f_\alpha^2\right)(n-1)\delta_{\mu\kappa}=f\left(\sum_\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\delta_{\mu\kappa}+(n-2)\frac{\partial f_\kappa}{\partial x^\mu}\right) \quad (3)$$

从(3)可见，如 $\mu\neq\kappa$，则

$$\frac{\partial f_\kappa}{\partial x^\mu}=0, \qquad \mu\neq\kappa$$

由此得f具有

$$f=X_1+\cdots\cdots+X_n$$

关于各 λ，X_λ 只是 x^λ 的函数。

再在(3)里令 $\mu=\kappa$，则

$$\left(k+\sum_\alpha f_\alpha^2\right)(n-1)=f\left(\sum_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\alpha}+(n-2)\frac{\partial f_\mu}{\partial x^\mu}\right), \quad (\mu\text{ 不求和}).$$

故得

$$(n-1)\left(k+\sum_\alpha f_\alpha^2\right)-f\sum_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\alpha}=(n-2)f\frac{\partial f_\mu}{\partial x^\mu}. \qquad (4)$$

因左边与μ无关，故

$$f\frac{\partial f_\mu}{\partial x^\mu}=f\frac{\partial f_\lambda}{\partial x^\lambda} \qquad (\text{不求和})$$

对于任意的 λ，μ 成立。因 $f\neq0$，故

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x^\mu}=\frac{\partial f_\lambda}{\partial x^\lambda}.$$

左边只是 x^μ，而右边只是 x^λ 的函数，因此

$$X_\mu''=X_\lambda''=\text{常数}(=2a)$$

式中的 $'$ 表示关于 x^μ，x^λ 的导数。积分之得

$$X_\mu=a(x^\mu)^2+2b_\mu x^\mu+c_\mu \qquad (\text{不求和})$$

将(5)代入(4)可得

$$k=\frac{R}{n(n-1)}=4\sum_\lambda(ac_\lambda-b_\lambda{}^2)$$

41. 如我们选在已知射影变换下的对应点具有相同坐标，则由定理 18.5 知，$\overset{*}{\Gamma}=\Phi(\Gamma)$的系数由

$$\overset{*}{\Gamma}{}_\mu{}^\lambda{}_\nu=\Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu+\psi_\mu\delta_\nu{}^\lambda+\psi_\nu\delta_\mu{}^\lambda \qquad (1)$$

的形状而定。假设关于 Γ道路的仿射参数 t，关于$\overset{*}{\Gamma}$ 仍是仿射参数。这时

$$\ddot{x}^\lambda+\Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=0, \qquad \ddot{x}^\lambda+\overset{*}{\Gamma}{}_\mu{}^\lambda{}_\nu\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=0$$

对于任意的 $\dot{x}^\lambda$ 同时成立。将(1)代入可得

$$\psi_\mu\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=0$$

故 $\psi_\mu=0$，可见探讨中的映射是仿射映射。

42. 考虑射影映射(1)（前题题解）。关于 λ，μ 缩短得

$$\overset{*}{\Gamma}{}_\lambda{}^\lambda{}_\nu=\Gamma_\lambda{}^\lambda{}_\nu+(n+1)\psi_\nu,$$

$$\psi_\nu=\frac{1}{n+1}\left(\overset{*}{\Gamma}{}_\varepsilon{}^\varepsilon{}_\nu-\Gamma_\varepsilon{}^\varepsilon{}_\nu\right).$$

将这些式子代入(1)并整理之则得 $\overset{*}{\Pi}_{\mu\nu}^{\lambda}=\Pi_{\mu\nu}^{\lambda}$。其次考虑坐标变换 $\bar{x}^\lambda=\bar{x}^\lambda(x)$，则

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}=\frac{\partial\bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\bar{x}^\mu\partial\bar{x}^\nu}+\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial\bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial\bar{x}^\nu}\right)$$

关于 λ，μ 缩短之得

$$\bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^{\lambda}=\frac{\partial\bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\bar{x}^\lambda\partial\bar{x}^\nu}+\Gamma_{\alpha\gamma}^{\alpha}\frac{\partial x^\gamma}{\partial\bar{x}^\nu}$$

$$=\frac{\partial\log|\Delta|}{\partial\bar{x}^\nu}+\Gamma_{\alpha\gamma}^{\alpha}\frac{\partial x^\gamma}{\partial\bar{x}^\nu}.$$

式中 $\Delta=\det(\partial x/\partial\bar{x})$（参照习题三第 20 题题解），故得

$$\bar{\Pi}_{\mu\nu}^{\lambda}=\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}-\frac{1}{n+1}(\bar{\Gamma}_{\varepsilon\mu}^{\varepsilon}\delta_\nu^\lambda+\bar{\Gamma}_{\varepsilon\nu}^{\varepsilon}\delta_\mu^\lambda)$$

$$=\frac{\partial\bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\bar{x}^\mu\partial\bar{x}^\nu}+\Pi_{\beta\gamma}^{\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial\bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial\bar{x}^\nu}\right)$$

$$-\frac{1}{n+1}\left(\delta_\nu^\lambda\frac{\partial\log|\Delta|}{\partial\bar{x}^\mu}+\delta_\mu^\lambda\frac{\partial\log|\Delta|}{\partial\bar{x}^\nu}\right).$$

一般地说 $\partial\log|\Delta|/\partial\bar{x}^\mu$ 并不为0，因此$\Pi_{\mu\nu}^{\lambda}$ 不是仿射联络系数。当然也不是张量的分量。

43. 在二维黎曼空间里总是有

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=a(x)(g_{\lambda\nu}\delta_\mu^\kappa-g_{\mu\nu}\delta_\lambda^\kappa)$$

的形状。故 $R_{\mu\nu}=-(n-1)ag_{\mu\nu}$。由此可见

$$W_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=R_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}+\frac{1}{n-1}(R_{\lambda\nu}\delta_\mu^\kappa-R_{\mu\nu}\delta_\lambda^\kappa)$$

$$=a(g_{\lambda\nu}\delta_\mu^\kappa-g_{\mu\nu}\delta_\lambda^\kappa)-a(g_{\lambda\nu}\delta_\mu^\kappa-g_{\mu\nu}\delta_\lambda^\kappa)=0.$$

使用定理 18.2 的恒等式亦可。例如

$$0=W_{\alpha 12}{}^{\alpha}=W_{112}{}^{1}+W_{212}{}^{2}=W_{212}{}^{2}.$$

44. $$\overset{*}{W}_{\lambda\mu\nu}=\overset{*}{\nabla}_\lambda\overset{*}{R}_{\mu\nu}-\overset{*}{\nabla}_\mu\overset{*}{R}_{\lambda\nu}$$

然因

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{R}_{\mu\nu} = \frac{\partial \overset{*}{R}_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \overset{*}{R}_{\alpha\nu}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \lambda\mu\end{matrix}\right\}^* - \overset{*}{R}_{\mu\alpha}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \lambda\nu\end{matrix}\right\}^*$$

$$= \nabla_\lambda \overset{*}{R}_{\mu\nu} - \overset{*}{R}_{\alpha\nu}(\psi_\lambda \delta_\mu{}^\alpha + \psi_\mu \delta_\lambda{}^\alpha) - \overset{*}{R}_{\mu\nu}\psi_\lambda - \overset{*}{R}_{\mu\lambda}\psi_\nu$$

故

$$\overset{*}{W}_{\lambda\mu\nu} = \nabla_\lambda \overset{*}{R}_{\mu\nu} - \overset{*}{R}_{\mu\nu}\psi_\lambda - (\nabla_\mu \overset{*}{R}_{\lambda\nu} - \overset{*}{R}_{\lambda\nu}\psi_\mu)。$$

又因$\overset{*}{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (n-1)\psi_{\mu\nu}$，故代入之得

$$\overset{*}{W}_{\lambda\mu\nu} = W_{\lambda\mu\nu} - R_{\mu\nu}\psi_\lambda + R_{\lambda\nu}\psi_\mu$$
$$- (n-1)(\nabla_\lambda \psi_{\mu\nu} - \nabla_\mu \psi_{\lambda\nu} - \psi_{\mu\nu}\psi_\lambda + \psi_{\lambda\nu}\psi_\mu)$$

再从 $\psi_{\mu\nu} = \nabla_\mu \psi_\nu - \psi_\mu \psi_\nu$ 得

$$\nabla_\lambda \psi_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \nabla_\mu \psi_\nu - \nabla_\lambda \psi_\mu \psi_\nu - \psi_\mu \nabla_\lambda \psi_\nu,$$

$$\nabla_\lambda \psi_{\mu\nu} - \nabla_\mu \psi_{\lambda\nu} = (\nabla_\lambda \nabla_\mu \psi_\nu - \nabla_\mu \nabla_\lambda \psi_\nu) - \psi_\mu \nabla_\lambda \psi_\nu + \psi_\lambda \nabla_\mu \psi_\nu$$
$$= -R_{\lambda\mu\nu}{}^\varepsilon \psi_\varepsilon - \psi_\mu(\psi_{\lambda\nu} + \psi_\lambda \psi_\nu) + \psi_\lambda(\psi_{\mu\nu} + \psi_\mu \psi_\nu)$$
$$= -R_{\lambda\mu\nu}{}^\varepsilon \psi_\varepsilon - \psi_\mu \psi_{\lambda\nu} + \psi_\lambda \psi_{\mu\nu}。$$

故

$$\overset{*}{W}_{\lambda\mu\nu} = W_{\lambda\mu\nu} - R_{\mu\nu}\psi_\lambda + R_{\lambda\nu}\psi_\mu + (n-1)R_{\lambda\mu\nu}{}^\varepsilon \psi_\varepsilon$$
$$= W_{\lambda\mu\nu} + (n-1)W_{\lambda\mu\nu}{}^\varepsilon \psi_\varepsilon。$$

45. 求

$$W_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta + \frac{1}{n-1}(R_{\mu\alpha}\delta_\nu{}^\beta - R_{\nu\alpha}\delta_\mu{}^\beta)$$

的共变导数得

$$\nabla_\lambda W_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = \nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta + \frac{1}{n-1}(\nabla_\lambda R_{\mu\alpha}\delta_\nu{}^\beta - \nabla_\lambda R_{\nu\alpha}\delta_\mu{}^\beta) \qquad (1)$$

再根据此式以及 $W_{\lambda\mu\alpha} = \nabla_\lambda R_{\mu\alpha} - \nabla_\mu R_{\lambda\alpha}$。

46. 在前题题解(1)里关于 λ, β 缩短得

$$\nabla_\varepsilon W_{\mu\nu\alpha}{}^\varepsilon = \nabla_\varepsilon R_{\mu\nu\alpha}{}^\varepsilon + \frac{1}{n-1}(\nabla_\nu R_{\mu\alpha} - \nabla_\mu R_{\nu\alpha})。$$

然由(13.9)知 $\nabla_\varepsilon R_{\mu\nu\alpha}{}^\varepsilon = \nabla_\mu R_{\nu\alpha} - \nabla_\nu R_{\mu\alpha}$，故知

$$\nabla_\varepsilon W_{\mu\nu\alpha}{}^{\varepsilon} = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) W_{\mu\nu\alpha} = \frac{n-2}{n-1} W_{\mu\nu\alpha}$$

47. 设 M^n 与常曲率空间 $\overline{M}^n$ 射影同胚。因为 $\overline{M}^n$ 是射影平坦，所以 $\overline{W}_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=0$。然因 $W_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}=\overline{W}_{\lambda\mu\nu}{}^{\kappa}$，故 M^n 也是射影平坦。因此由定理 18.3 知 M^n 是常曲率空间。

48. 设 ϕ 是共形变换同时又是射影变换。选择坐标系使得在 ϕ 下的对应点具有相同坐标，则

$$\begin{aligned}\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}^{*} &= \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} + \rho_\mu \delta_\nu{}^\lambda + \rho_\nu \delta_\mu{}^\lambda - \rho^\lambda g_{\mu\nu} \\ &= \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} + \psi_\mu \delta_\nu{}^\lambda + \psi_\nu \delta_\mu{}^\lambda\end{aligned}$$

故

$$\rho_\mu \delta_\nu{}^\lambda + \rho_\nu \delta_\mu{}^\lambda - \rho^\lambda g_{\mu\nu} = \psi_\mu \delta_\nu{}^\lambda + \psi_\nu \delta_\mu{}^\lambda \qquad (1)$$

成立。关于 λ，ν 缩短得 $n\rho_\mu=(n+1)\psi_\mu$。代入（1）以消去 ψ_μ 得

$$\rho_\mu \delta_\nu{}^\lambda + \rho_\nu \delta_\mu{}^\lambda = (n+1)\rho^\lambda g_{\mu\nu}.$$

因此 $(n+2)(n-1)\rho^\lambda=0$，于是得 ρ 是常数，故 ϕ 为相似变换。

49.
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X W_{\lambda\mu\nu} &= \mathcal{L}_X(\nabla_\lambda R_{\mu\nu} - \nabla_\mu R_{\lambda\nu}) \\ &= \nabla_\lambda \mathcal{L}_X R_{\mu\nu} - R_{\alpha\nu}\mathcal{L}_X \left\{ {\alpha \atop \lambda\mu} \right\} - R_{\mu\alpha}\mathcal{L}_X \left\{ {\alpha \atop \lambda\nu} \right\} \\ &\quad - \nabla_\mu \mathcal{L}_X R_{\lambda\nu} + R_{\alpha\nu}\mathcal{L}_X \left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} + R_{\lambda\alpha}\mathcal{L}_X \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}.\end{aligned}$$

将 $\mathcal{L}_X \left\{ {\alpha \atop \lambda\nu} \right\} = \psi_\lambda \delta_\nu{}^\alpha + \psi_\nu \delta_\lambda{}^\alpha$，$\mathcal{L}_X R_{\mu\nu} = -(n-1)\nabla_\mu \psi_\nu$ 代入之，使用利齐恒等式，则得右边 $=(n-1)W_{\lambda\mu\nu}{}^{\varepsilon}\psi_\varepsilon$。

50. 射影开玲向量 $X=(\xi^\lambda)$ 满足

$$\mathcal{L}_X \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = \nabla_\mu \nabla_\nu \xi^\lambda + R_{\varepsilon\mu\nu}{}^{\lambda}\xi^\varepsilon = \psi_\mu \delta_\nu{}^\lambda + \psi_\nu \delta_\mu{}^\lambda.$$

关于 λ 与 ν 缩短得

$$\nabla_\mu \nabla_\lambda \xi^\lambda = (n+1)\psi_\mu$$

故令

$$\psi=\frac{1}{n+1}\nabla_\lambda\xi^\lambda=\frac{1}{n+1}\operatorname{div}X$$

则得 $\psi_\lambda=\partial\psi/\partial x^\lambda$。当 X 给定时，ψ 就决定下来。故记 ψ 为 ψ_X，其分量为 $\psi_{X,\lambda}$。

(i) $$\mathscr{L}_{aX+bY}\left\{{\lambda\atop\mu\nu}\right\}=a\mathscr{L}_X\left\{{\lambda\atop\mu\nu}\right\}+b\mathscr{L}_Y\left\{{\lambda\atop\mu\nu}\right\}$$

$$=a(\psi_{X,\mu}\delta_\nu{}^\lambda+\psi_{X,\nu}\delta_\mu{}^\lambda)+b(\psi_{Y,\mu}\delta_\nu{}^\lambda+\psi_{Y,\nu}\delta_\mu{}^\lambda)$$

$$=(a\psi_{X,\mu}+b\psi_{Y,\mu})\delta_\nu{}^\lambda+(a\psi_{X,\nu}+b\psi_{Y,\nu})\delta_\mu{}^\lambda$$

因此 $aX+bY$ 也是射影开玲向量，而且

$$\psi_{aX+bY,\mu}=a\psi_{X,\mu}+b\psi_{Y,\mu}.$$

由此可见

$$\psi_{aX+bY}=a\psi_X+b\psi_Y$$

(ii) $$\mathscr{L}_{[X,Y]}\left\{{\lambda\atop\mu\nu}\right\}=\mathscr{L}_X\mathscr{L}_Y\left\{{\lambda\atop\mu\nu}\right\}-\mathscr{L}_Y\mathscr{L}_X\left\{{\lambda\atop\mu\nu}\right\}$$

$$=(\mathscr{L}_X\psi_{Y,\mu}-\mathscr{L}_Y\psi_{X,\mu})\delta_\nu{}^\lambda$$

$$+(\mathscr{L}_X\psi_{Y,\nu}-\mathscr{L}_Y\psi_{X,\nu})\delta_\mu{}^\lambda.$$

故 $[X,Y]$ 也是射影开玲向量．其次计算 $\psi_{[X,Y]}=\operatorname{div}[X,Y]/(n+1)$ 可得 $\psi_{[X,Y]}=X\psi_Y-Y\psi_X$。

(iii) 与第 31 题(iii)完全一样．

51. 根据第 4 题之(iii)知

$$\nabla_\nu\mathscr{L}_Xg_{\lambda\mu}-\mathscr{L}_X\nabla_\nu g_{\lambda\mu}=g_{\alpha\mu}\mathscr{L}_X\left\{{\alpha\atop\nu\lambda}\right\}+g_{\lambda\alpha}\mathscr{L}_X\left\{{\alpha\atop\nu\mu}\right\}$$

然因 $\nabla_\nu g_{\lambda\mu}=0$，故对于任意的 X

$$\nabla_\nu\mathscr{L}_Xg_{\lambda\mu}=g_{\alpha\mu}\mathscr{L}_X\left\{{\alpha\atop\nu\lambda}\right\}+g_{\lambda\alpha}\mathscr{L}_X\left\{{\alpha\atop\nu\mu}\right\}$$

成立。

(i) 如 X 为射影开玲向量，则

$$\nabla_\nu\mathscr{L}_Xg_{\lambda\mu}=g_{\alpha\mu}(\psi_\nu\delta_\lambda{}^\alpha+\psi_\lambda\delta_\nu{}^\alpha)+g_{\lambda\alpha}(\psi_\nu\delta_\mu{}^\alpha+\psi_\mu\delta_\nu{}^\alpha)$$

$$=\psi_\lambda g_{\mu\nu}+\psi_\mu g_{\lambda\nu}+2\psi_\nu g_{\lambda\mu}.\qquad(1)$$

(ii) 在(1)里对调指标 $\lambda\to\mu\to\nu\to\lambda$，则

$$\nabla_\lambda \mathscr{L}_X g_{\mu\nu} = \psi_\mu g_{\nu\lambda} + \psi_\nu g_{\mu\lambda} + 2\psi_\lambda g_{\mu\nu}.$$

$$\nabla_\mu \mathscr{L}_X g_{\nu\lambda} = \psi_\nu g_{\lambda\mu} + \psi_\lambda g_{\nu\mu} + 2\psi_\mu g_{\nu\lambda}.$$

将此三式边边相加得

$$\nabla_\nu \mathscr{L}_X g_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda \mathscr{L}_X g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \mathscr{L}_X g_{\nu\lambda} = 4(\psi_\nu g_{\lambda\mu} + \psi_\lambda g_{\mu\nu} + \psi_\mu g_{\nu\lambda}).$$

如在上式中使用 $\nabla_\mu(\psi g_{\lambda\mu}) = \psi_\nu g_{\lambda\mu}$，便可得到结论。

习题五解答 (pp. 87～91)

1. 因为 $c(t) = E_p \circ \lambda(t) = E_p(tX)$，所以 $c(t)$的坐标是

$$x^\lambda = \phi^\lambda(x_0, t\xi, 1) = \phi^\lambda(x_0, \xi, t)$$

然因 ϕ^λ 是由

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

的解定义的，故 t 为仿射参数。

2. 对于 $\omega(0) = q$，考虑定理 19.3 里所说的 U_q，则由定理 19.4 知，ω 在 U_q 中那部分是测地线。同理，对于各 t 在 $\omega(t)$ 的邻域里，ω 是测地线，故 ω 在它的任意点满足测地线的微分方程。从而 ω 是测地线。

3. 设从曲线或曲面 α 外的点 p 向 α 所引最短曲线 ω 的足为 q。首先，因为 ω 的长是二点 p，q 间的最短距离，所以由前题知是测地线。再者因为存在测地线 ω，故可考虑 $X \in T_p(M)$ 使得 $E_p(X) = q$。因测地线的终点与初始值以及 t 连续相关，故 E_p 可在 $T_p(M)$ 中 X 的邻域里定义。在 $T_p(M)$考虑半径为$\|X\|$的超球，作它在 E_p 下的象 S（在 $E_p(X)$的邻域里存在），则由定理 19.5 知，S 与 ω 在 q 垂直。然而 S 与 α 在 q 相切。原因是，如不相切，则 S 与 α 在 q 相割，故在 α 上存在点 r 使得 $\rho(p, q) > \rho(p, r)$。故 ω 与 α 垂直。

注意。从 p 到 α 上的点 r 的距离 $\rho(p, r)$ 是 r 的连续函数，故如 α 是紧致的，则存在最小值 $\rho(p, r_0)$，$r_0 \in \alpha$。但是实际上不能保证从 p 到 r_0 存在长为 $\rho(p, r_0)$ 的测地线。原因是，黎曼空间的任意二点未必能用测地线连结。在作整体研究时，为避免这样情况，常常假

设完备性如下所述。

定义. 如黎曼空间 M^n 做为距离空间是完备的，即 M^n 上的所有柯西序列总收敛时，则称 M^n **完备**。

这里所谓柯西序列就是满足下列条件的M^n 的点列 $\{p_i\}$，$i=1, 2, \cdots\cdots$：

对于任意的 $\varepsilon>0$ 存在N，当 $n, m>N$ 时可使 $\rho(p_n, p_m)<\varepsilon$。

黎曼空间完备的充要条件是下列条件(i)，(ii)，(iii)之一成立。

(i) M^n 的所有有界子集的闭包是紧致的。

(ii) 对于 M^n 的一点 p，过p 的测地线全可任意延长，即沿着过p的测地线量得的弧长可取任意大值。

(iii) 所有的测地线都可向两侧任意延长。

若是完备的，则 M^n 的任意两点 p, q 可用 $\rho(p, q)$的最短测地线连结。又若 M^n 是紧致时，则是完备的。

4. 设$\{x^\lambda\}$为 $x_0{}^\lambda(q)$的邻域里的任意坐标系。设 $\det(a_\lambda{}^\mu)\neq 0$，则

$$\bar{x}^\lambda = a_\mu{}^\lambda(x^\mu - x_0{}^\mu) + \frac{1}{2}a_\varepsilon{}^\lambda \left\{ {\varepsilon \atop \mu\nu} \right\}_q (x^\mu - x_0{}^\mu)(x^\nu - x_0{}^\nu)$$

是以 q 为原点的测地坐标系。在此变换下，度量张量变为

$$(g_{\lambda\mu})_q = \left(\bar{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\mu}\right)_q = (\bar{g}_{\alpha\beta})_q a_\lambda{}^\alpha a_\mu{}^\beta.$$

为了使$(\bar{g}_{\alpha\beta})_q=\delta_{\alpha\beta}$，取矩阵$(a_\lambda{}^\mu)$满足

$$(g_{\lambda\mu})_q = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\lambda{}^\alpha a_\mu{}^\alpha$$

即可。由定理 4.3 可见，这是可能的。

注意。如用下题，此题显然。

5. 因为存在 $g_{\lambda\mu}(q)=\delta_{\lambda\mu}$ 的坐标系$\{x^\lambda\}$，故从此 $\{x^\lambda\}$，运用§20 的方法作法坐标系，由 $(\partial x^\lambda/\partial \bar{x}^\mu)_q=\delta_\mu{}^\lambda$ 得 $\bar{g}_{\lambda\mu}(q)=\delta_{\lambda\mu}$。

6. 关于以 q 为原点的法坐标系 $\{x^\lambda\}$，点对称 ϕ 由 $p(x^\lambda)\to$

$\overline{p}(-x^\lambda)$而定。根据假设ϕ是等距变换，故 $g_p=\Phi(g_{\overline{p}})$。因此由 $\overline{x}^\lambda=-x^\lambda$ 得

$$g_{\lambda\mu}(x)=g_{\alpha\beta}(\overline{x})\frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial\overline{x}^\beta}{\partial x^\mu}=g_{\lambda\mu}(\overline{x})。$$

于是 $R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa(x)=R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa(\overline{x})$。对 x^ω 求偏导数得

$$\frac{\partial R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa(x)}{\partial x^\omega}=-\frac{\partial R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa(\overline{x})}{\partial\overline{x}^\omega}$$

令 $x^\lambda\to0$ 则得下式。

$$\left(\frac{\partial R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa}{\partial x^\omega}\right)_q=0$$

从§20关于测地坐标系的讨论可见，与$(\nabla_\omega R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa)_q=0$ 等价。

7. $\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}x^\mu x^\nu=0$ 对 x^λ 求偏导数得

$$\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}}{\partial x^\lambda}x^\mu x^\nu+2\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}x^\mu=0。$$

乘以 x^λ 并求和得

$$\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}}{\partial x^\lambda}x^\lambda x^\mu x^\nu=0。$$

由此可得在原点 q

$$\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \nu\lambda}\right\}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \lambda\mu}\right\}}{\partial x^\nu}=0$$

另外，在 q

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa=\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \lambda\nu}\right\}}{\partial x^\mu}$$

故

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa+R_{\lambda\nu\mu}{}^\kappa=2\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}}{\partial x^\lambda}-\left(\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \lambda\nu}\right\}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \lambda\mu}\right\}}{\partial x^\nu}\right)=3\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}}{\partial x^\lambda}$$

8. (i) 将$\zeta^\kappa(s)$关于 s 展开之得

$$\zeta^\kappa(s)=\eta^\kappa+\dot{\zeta}^\kappa(0)s+(1/2)\ddot{\zeta}^\kappa(0)s^2+O(s^3).$$

另外，因 $\zeta^\kappa(s)$平行，故

$$0=\frac{\delta\zeta^\kappa}{\delta s}=\frac{d\zeta^\kappa}{ds}+\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\zeta^\nu \qquad (1)$$

由此得 $\dot{\zeta}^\kappa(0)=0$。其次将(1)对 s 求导数，则

$$0=\frac{d^2\zeta^\kappa}{ds^2}+\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\zeta^\nu+\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\zeta^\nu$$

$$+\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d\zeta^\nu}{ds}$$

在 $s=0$ 考虑之，因 $\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}_q=0$，$(dx^\lambda/ds)_q=\xi^\lambda$，$\zeta^\nu(0)=\eta^\nu$，故

$$\ddot{\zeta}^\kappa(0)=-\left(\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}}{\partial x^\lambda}\right)_q\xi^\lambda\xi^\mu\eta^\nu$$

$$=-(1/3)(R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa+R_{\lambda\nu\mu}{}^\kappa)_q\xi^\lambda\xi^\mu\eta^\nu$$
$$=-(1/3)(R_{\lambda\nu\mu}{}^\kappa)_q\xi^\lambda\xi^\mu\eta^\nu.$$

因此得

$$\zeta^\kappa(s)=\eta^\kappa-\frac{1}{6}(R_{\lambda\mu\nu}{}^\kappa)_q\xi^\lambda\eta^\mu\xi^\nu s^2+O(s^3) \qquad (2)$$

(ii) 因为是平移，所以向量的长不变。即$\|Z(s)\|=\|Y\|$成立。再者，

$$\|Z(s)\|_q^2=g_{\lambda\mu}(q)\zeta^\lambda(s)\zeta^\mu(s)$$

的意义是：用点 q 处的尺子来测量点 $\xi^\lambda s$ 处的向量$(\zeta^\lambda(s))$，因为在 q 处的观测者并不知道在点 $\xi^\lambda s$ 处的尺子，而用 q 处的尺子测得的长——外表上的长。

今取探讨中的法坐标系满足 $g_{\lambda\mu}(q)=\delta_{\lambda\mu}$，则由(2)得

$$\|Z(s)\|_q^2 = g_{\lambda\mu}(q)\zeta^\lambda(s)\zeta^\mu(s)$$
$$= \|Y\|^2 - (1/3)(R_{\lambda\mu\nu\omega})_q \xi^\lambda \eta^\mu \xi^\nu \eta^\omega s^2 + O(s^4)$$
$$= \|Y\|^2 + (s^2/3)\|Y\|^2 \rho(X, Y) + O(s^4)$$

($\langle X, Y\rangle = 0$ 只在最后的推导中使用)．故

$$\|Z(s)\|_q^2 = (1 + \frac{s^2}{3}\rho(X, Y))\|Y\|^2 + O(s^4).$$

一般地说，对于 $f(s) = (1 + as^2 + O(s^4))^{\frac{1}{2}}$，$\dot{f}(0) = 0$，$\ddot{f}(0) = a$ 故

$$f(s) = 1 + \frac{s^2}{2}a + O(s^3).$$

从而

$$\|Z(s)\|_q = \left(1 + \frac{s^2}{6}\rho(X, Y)\right)\|Y\| + O(s^3). \qquad (3)$$

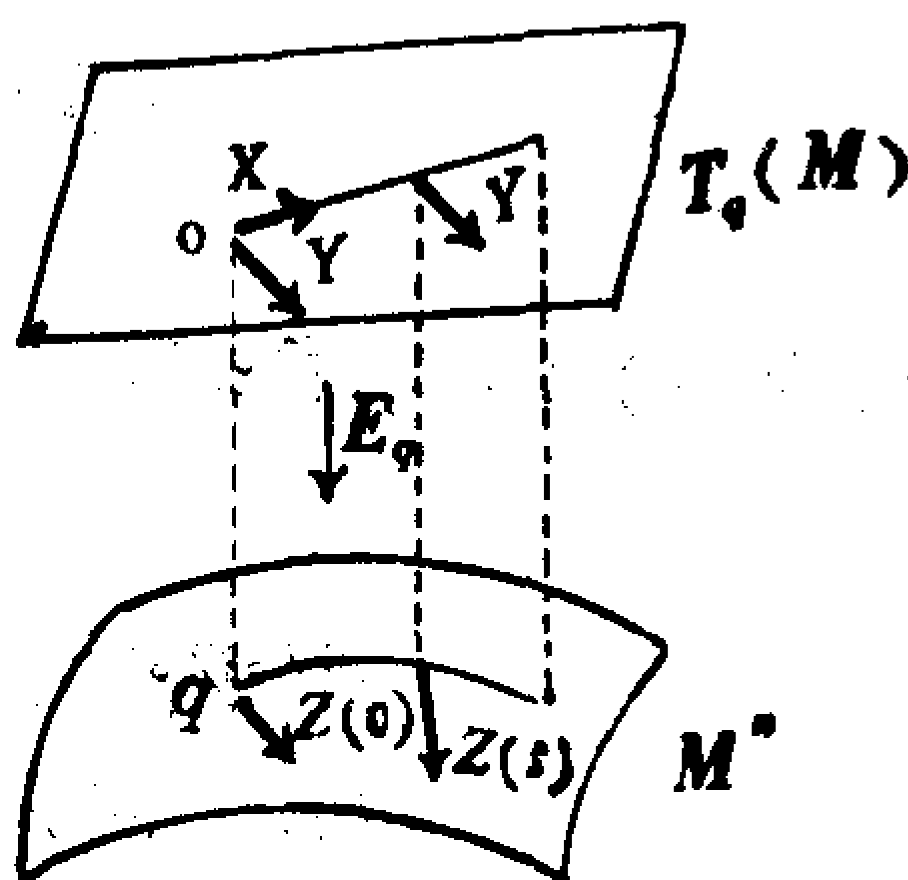


图 11

注意．(3) 式说明在 q 的邻域里，M^n 与 $T_q(M)$ 在度量上的差异可由断面曲率估值．例如，若 $\rho(X, Y) > 0$，则 $\|Z(s)\|_q > \|Y\|$．

9． 从(21.15)$_c$知

$$L'(0) = \langle \dot{c}, Y\rangle \Big|_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} \langle \nabla_{\dot{c}}\dot{c}, Y\rangle du.$$

根据假设，$\langle \dot{c}, Y\rangle |_{u_1}^{u_2} = 0$，$\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$．$\therefore L'(0) = 0$．

10． 测地线 c 的第二变分是(21.23)$_g$，即

$$L''(0) = \langle \dot{c}, \nabla_Y Y\rangle \Big|_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} \{\|\nabla_{\dot{c}}Y\|^2 - \langle \dot{c}, \nabla_{\dot{c}}Y\rangle^2 + R(\dot{c}, Y, \dot{c}, Y)\} du.$$

因 $Y = (\eta^\lambda)$ 是开玲向量，故

$$\langle \dot{c}, \nabla_{\dot{c}}Y\rangle = \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu \nabla_\mu \eta_\lambda = (1/2)\dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu (\nabla_\lambda \eta_\mu + \nabla_\mu \eta_\lambda) = 0.$$

又

$$\|\nabla_{\dot c}Y\|^2=\langle\nabla_{\dot c}Y,\ \nabla_{\dot c}Y\rangle=\nabla_{\dot c}\langle Y,\nabla_{\dot c}Y\rangle-\langle Y,\ \nabla_{\dot c}\nabla_{\dot c}Y\rangle.$$

将这些式子代入前式得

$$L''(0)=\langle\dot c,\ \nabla_Y Y\rangle\Big|_{u_1}^{u_2}+\int_{u_1}^{u_2}\{\nabla_{\dot c}\langle Y,\ \nabla_{\dot c}Y\rangle-\langle Y,\ \nabla_{\dot c}\nabla_{\dot c}Y\rangle+R(\dot c,\ Y,\ \dot c,\ Y)\}du$$

$$=\Big(\langle\dot c,\ \nabla_Y Y\rangle+\langle Y,\ \nabla_{\dot c} Y\rangle\Big)_{u_1}^{u_2}-\int_{u_1}^{u_2}\langle\nabla_{\dot c}\nabla_{\dot c}Y+\hat R(Y,\ \dot c)\dot c,\ Y\rangle du$$

然因

$$\langle\dot c,\ \nabla_Y Y\rangle+\langle Y,\ \nabla_{\dot c}Y\rangle=\dot x^\lambda\eta^\mu\nabla_\mu\eta_\lambda+\eta^\lambda\dot x^\mu\nabla_\mu\eta_\lambda$$
$$=\dot x^\lambda\eta^\mu(\nabla_\mu\eta_\lambda+\nabla_\lambda\eta_\mu)=0$$

$$\langle\nabla_{\dot c}\nabla_{\dot c}Y+\hat R(Y,\ \dot c)\dot c,Y\rangle$$
$$=(\dot x^\lambda\dot x^\mu\nabla_\lambda\nabla_\mu\eta^\kappa+R_{\alpha\lambda\mu}{}^\kappa\eta^\alpha\dot x^\lambda\dot x^\mu)\eta_\kappa$$
$$=\dot x^\lambda\dot x^\mu(\nabla_\lambda\nabla_\mu\eta^\kappa+R_{\alpha\lambda\mu}{}^\kappa\eta^\alpha)\eta_\kappa$$
$$=\dot x^\lambda\dot x^\mu\eta_\kappa\,\mathscr{L}_Y\left\{{\kappa \atop \lambda\mu}\right\}=0$$

故得$L''(0)=0$.

11. 将 $\|\nabla_{\dot c}Z\|^2=\nabla_{\dot c}\langle Z,\nabla_{\dot c}Z\rangle-\langle Z,\nabla_{\dot c}\nabla_{\dot c}Z\rangle$ 代入之，再根据 $Z(u_1)=Z(u_2)=0$.

12. 将$Y=f(u)N$代入$(21.25)_g$，即

$$L''(0)=\int_{u_1}^{u_2}\{\|\nabla_{\dot c}Y\|^2+R(\dot c,Y,\dot c,Y)\}du$$

因为

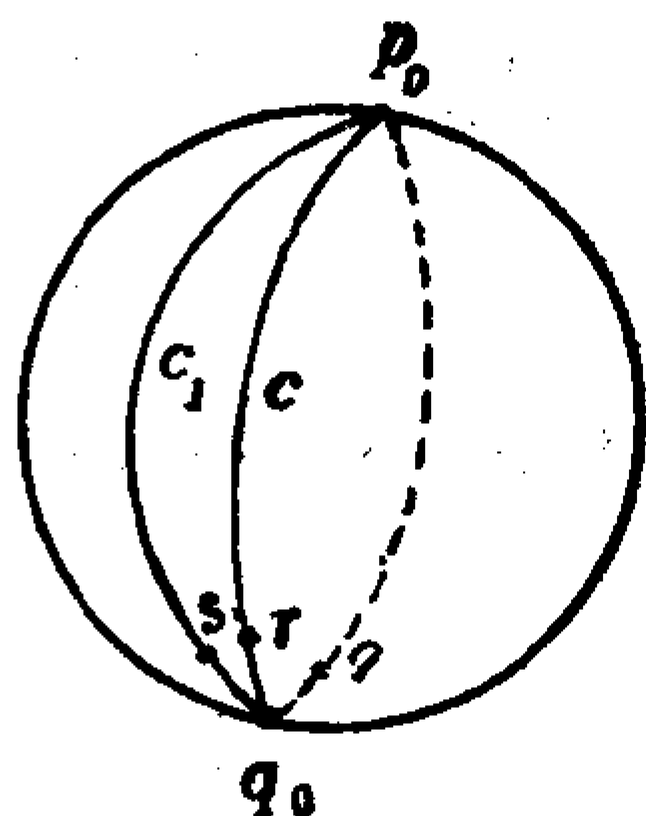
$$\nabla_{\dot c}Y=\nabla_{\dot c}(fN)=\dot fN+f\nabla_{\dot c}N=\dot fN,\ \|\nabla_{\dot c}Y\|^2=\dot f^2$$

$$R(\dot c,Y,\dot c,Y)=f^2R(\dot c,N,\dot c,N)=-f^2\rho(\dot c,N)$$

故

$$L''(0)=\int_{u_1}^{u_2}\{\dot{f}^2-f^2\rho(\dot{c},N)\}du$$

再在第一项里作分部积分



$$\int_{u_1}^{u_2}\dot{f}^2du=\left(f\dot{f}\right)_{u_1}^{u_2}-\int_{u_1}^{u_2}f\ddot{f}du$$

则得

$$L''(0)=-\int_{u_1}^{u_2}f\{\ddot{f}+f\rho(\dot{c},N)\}du$$

13. 设 c 为图 12 中的大圆 $p_0rq_0qp_0$，p_0sq_0 为 c 附近的任意半大圆 c_1。又设 r,s,q 都是充分接近于 q_0 的点。这时

$$\widehat{p_0rq_0}+\widehat{q_0q}=\widehat{p_0sq_0}+\widehat{q_0q}$$

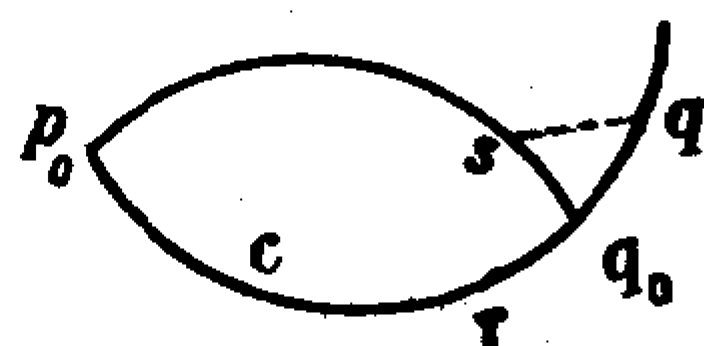


图 12

然因 c_1 与弧 $\widehat{q_0q}$ 在点 q_0 有角，故

$\widehat{sq_0}+\widehat{q_0q}>\rho(s,q)$　（$=s,q$ 间的距离）

从而在 q_0 的附近可连结从 s 到 q 的曲线使其长小于 $\widehat{sq_0}+\widehat{q_0q}$（图 12 中的虚线）。即在 c 的充分近处存在从 p_0 到 q 的更短的曲线。

14. 设 $c(u)$ 为 $c(0)=p$，$c(l)=q$，长 $l=\frac{\pi}{a}$ 的测地线。将在 p 处与 $\dot{c}(0)$ 垂直的单位向量沿 c 平移之得向量场设为 N。设 $f(u)$为满足 $f(0)=f(l)=0$ 的任意函数，考虑变分向量为 $Y=fN$，固定两端点的变分，则由 12 题知第二变分为

$$L''(0)=-\int_0^l f(\ddot{f}+f\rho(\dot{c},N))du$$

现在令

$$f(u)=\sin au$$

因满足 $f(0)=f(l)=0$，故对这种 f

$$L''(0)=\int_0^l f^2(a^2-\rho(\dot{c},N))du \qquad (1)$$

成立。

在 $T_p(M)$ 里设 $\dot{c}, N_1, \cdots, N_{n-1}$ 为标准正交基，将 N_i 平移之得到的 c 上向量场再用 N_i 记之。因对各 N_i，(1)成立，故

$$L_i''(0)=\int_0^l f^2(a^2-\rho(\dot{c}, N_i))du.$$

关于 i 求和，注意关于 $\dot{c}$ 的平均曲率 $\rho(\dot{c})$ 是

$$\rho(\dot{c})=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\rho(\dot{c}, N_i)$$

则

$$\sum_{i=1}^{n-1}L_i''(0)=\int_0^l f^2\{(n-1)a^2-(n-1)\rho(\dot{c})\}du$$

$$=(n-1)\int_0^l f^2(a^2-\rho(\dot{c}))du<0.$$

因此，至少对于一个 i

$$L_i''(0)<0$$

成立。此式说明：对于变分 $Y_i=f(u)N_i$，讨论中的测地线 c 之长在变分曲线之长中取极大值，故在变分曲线中存在比 c 短的。从而长正好是 π/a 的测地线不是最短的。长超过 π/a 的测地线包含长为 π/a 的部分弧，这一部分不是最短，因此全体也不是最短。

15. 因为 $\mathfrak{F}=(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)^{\frac{1}{2}}$，$\dot{x}^\lambda=\partial x^\lambda/\partial u$，故

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x^\lambda}=\frac{1}{2\mathfrak{F}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu,\qquad \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\dot{x}^\lambda}=\frac{g_{\lambda\nu}\dot{x}^\nu}{\mathfrak{F}},$$

$$\frac{d}{du}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\dot{x}^\lambda}=\frac{1}{\mathfrak{F}^2}\left\{\mathfrak{F}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu+g_{\lambda\nu}\ddot{x}^\nu\right)-g_{\lambda\nu}\dot{x}^\nu\frac{d}{du}\mathfrak{F}\right\}$$

在 c 上取 u 为弧长 s，则 $\mathfrak{F}\equiv1$，故在 c 上

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x^\lambda}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$$

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\dot{x}^\lambda}=\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu+g_{\lambda\nu}x^\nu$$

将这些式子代入欧拉微分方程得

$$0=\frac{d}{ds}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{x}^{\lambda}}-\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x^{\lambda}}=g_{\lambda\nu}\ddot{x}^{\nu}+\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\right)\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}$$

与 $g^{\lambda\kappa}$ 作积和得

$$0=\ddot{x}^{\kappa}+\frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\right)\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}$$

$$=\ddot{x}^{\kappa}+\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}$$

16. (i) 显然.

(ii)
$$\frac{d}{dt}(\langle X,\nabla_{\dot{c}}Y\rangle-\langle\nabla_{\dot{c}}X,Y\rangle)$$
$$=\nabla_{\dot{c}}(\langle X,\nabla_{\dot{c}}Y\rangle-\langle\nabla_{\dot{c}}X,Y\rangle)$$
$$=\langle X,\nabla_{\dot{c}}\nabla_{\dot{c}}Y\rangle-\langle\nabla_{\dot{c}}\nabla_{\dot{c}}X,Y\rangle$$
$$=-\langle X,\hat{R}(Y,\dot{c})\dot{c}\rangle+\langle\hat{R}(X,\dot{c})\dot{c},Y\rangle$$
$$=-R(Y,\dot{c},\dot{c},X)+R(X,\dot{c},\dot{c},Y)=0.$$

故 $\langle X,\nabla_{\dot{c}}Y\rangle-\langle\nabla_{\dot{c}}X,Y\rangle$ 为常数。

(iii) 因 c 为雅可比场，故设 $X=\dot{c}$，上式亦可使用，

$$\langle\dot{c},\nabla_{\dot{c}}Y\rangle=a\ (\text{常数}).$$

另外，因

$$\frac{d}{dt}\langle\dot{c},Y\rangle=\nabla_{\dot{c}}\langle\dot{c},Y\rangle=\langle\dot{c},\nabla_{\dot{c}}Y\rangle=a$$

故

$$\langle\dot{c},Y\rangle=at+b.$$

17. Y 满足与雅可比场的条件式

$$\nabla_{\dot{c}}\nabla_{\dot{c}}Y+\hat{R}(Y,\dot{c})\dot{c}=0$$

等价的

$$\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\mu}\mathcal{L}_{Y}\left\{{\kappa \atop \lambda\mu}\right\}=0$$

18. 取充分小的含 0 的开区间 I，使得当 $\varepsilon\in I$ 时，$v+\varepsilon w\in O_p$.

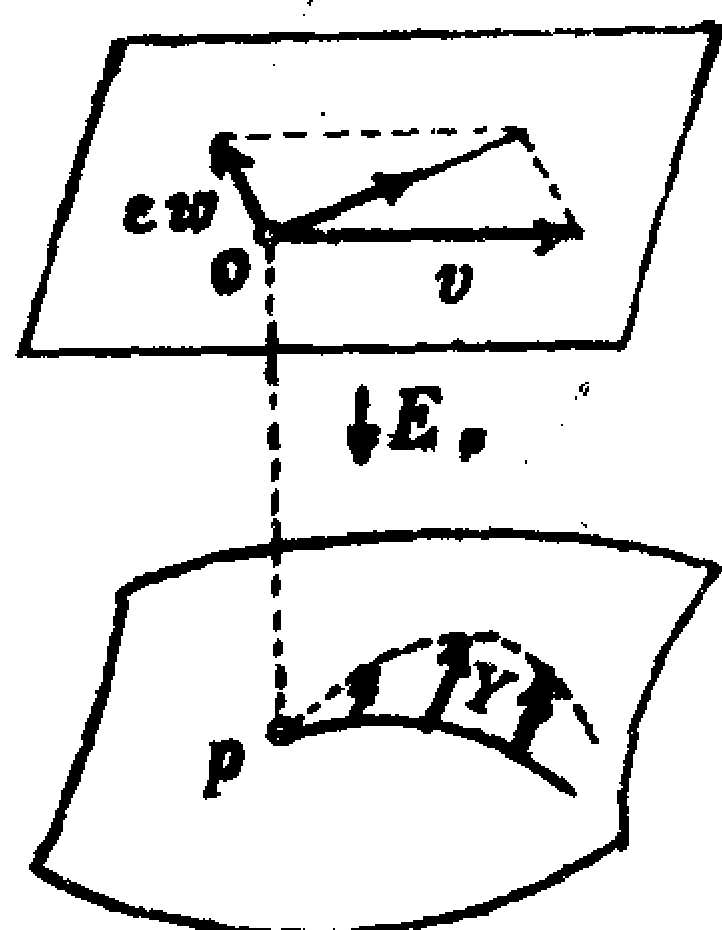


图 13

$$\alpha(t,\varepsilon)=E_p(t(v+\varepsilon w))$$

为 c 的变分，若固定 ε，则

$$\alpha_{\varepsilon}:\ t\to\alpha(t,\varepsilon)$$

的变分曲线为测地线，故由 §21 例题 3 知，变分向量

$$Y(t,\varepsilon)=\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}$$

是各变分曲线上的雅可比场。

考虑 $T_p(M)$ 的曲线

$$\lambda_t:\ \varepsilon\to tv+\varepsilon tw$$

根据标准同构映射的定义知

$$\mathfrak{J}_{tv}(tw)=(\lambda_t)_*\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$

故

$$Y(t)=(E_p)_*\mathfrak{J}_{tv}(tw)=(E_p)_*(\lambda_t)_*\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$

$$=(E_p\circ\lambda_t)_*\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$

然因 $\alpha(t,\varepsilon)=E_p\circ\lambda_t(\varepsilon)$，故

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}=(E_p\circ\lambda_t)_*\frac{d}{d\varepsilon}$$

因此得

$$Y(t,0)=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=Y(t),$$

可见 $Y(t)$ 是 c 上的雅可比场。

$Y(0)=0$ 显然。以下证明 $(\nabla_{\dot c}Y)(0)=w$。首先由定理 11.4 知

$$(\nabla_{\dot c}Y)(0)=\left(\frac{\delta}{\delta t}\ \frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}\right)_{t=\varepsilon=0}=\left(\frac{\delta}{\delta\varepsilon}\ \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_{t=\varepsilon=0}$$

再取以 p 为原点的法坐标系，设 $v=(v^\lambda),w=(w^\lambda),Y=(\eta^\lambda)$。$\alpha(t,\varepsilon)$

的坐标为

$$x^\lambda = (v^\lambda + \varepsilon w^\lambda)t$$

故 $\partial\alpha/\partial t$ 的分量为

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial t} = v^\lambda + \varepsilon w^\lambda$$

$\dfrac{\delta}{\delta\varepsilon}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}$ 在 $t=\varepsilon=0$ 处的分量为

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial x^\lambda}{\partial t} + \left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\eta^\mu\frac{\partial x^\nu}{\partial t}\right)_{t=\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}(v^\lambda + \varepsilon w^\lambda) = w^\lambda$$

故 $(\nabla_{\dot c}Y)(0) = w$。

反之，若给定 $(\nabla_{\dot c}Y)(0)$，则 $Y(0)=0$ 的雅可比场唯一地决定，故由(1)可决定全体。

19. 设 $\mathfrak{I}_v: T_p(M) \to T_v(T_p(M))$ 为标准同构映射，令

$$w = \mathfrak{I}_v^{-1}(B)$$

设 $Y(t)$ 为测地线 $c = E_p \circ \lambda$ 上的雅可比场中满足

$$Y(0) = 0, \qquad (\nabla_{\dot c}Y)(0) = w$$

者，由前题知

$$Y(1) = (E_p)_* \mathfrak{I}_v w = (E_p)_* B \tag{1}$$

成立。又因 Y 为雅可比场，故

$$\langle \nabla_{\dot c}Y, \dot c\rangle = a,$$

$$\langle Y, \dot c\rangle = at + b, \qquad a, b \in \boldsymbol{R}$$

成立，从 $Y(0)=0$ 得 $b=0$。从而

$$\langle Y, \dot c\rangle(t) = at = t\langle \nabla_{\dot c}Y, \dot c\rangle(0) = t\langle w, v\rangle$$

故得

$$\langle Y, \dot c\rangle(1) = \langle w, v\rangle \tag{2}$$

又因

$$\dot c(1) = (E_p)_* \circ \lambda_*\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=1} = (E_p)_* \dot\lambda(1) = (E_p)_*(A)$$

故

$$\langle (E_p)_*(A), (E_p)_*(B)\rangle = \langle \dot{c}(1), Y(1)\rangle \quad \because (1)$$
$$= \langle \dot{c}, Y\rangle(1) = \langle w, v\rangle \quad \because (2). \qquad (3)$$

再注意 $T_p(M)$ 的度量定义以及 $\mathfrak{J}_v$ 的含义本质上是平移，故

$$\langle w, v\rangle = \langle \mathfrak{J}_r w, \mathfrak{J}_v v\rangle = \langle B, A\rangle.$$

与(3)比较之得

$$\langle A, B\rangle = \langle (E_p)_*(A), (E_p)_*(B)\rangle$$

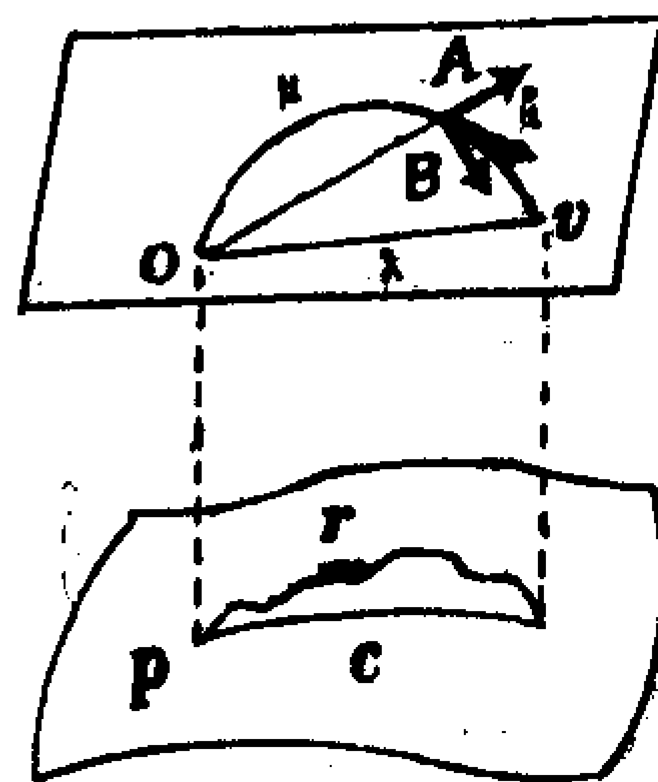


图 14

20. (i) 因 $v \neq 0$，故对于所有的 t 假设 $\mu(t) \neq 0$ 并不失去一般性。对于 $t \in (0,1]$，设

$$A = \mathfrak{J}_{\mu(t)} \frac{\mu(t)}{\|\mu(t)\|} \in T_{\mu(t)}(T_p(M))$$

再在 $T_{\mu(t)}(T_p(M))$ 选择标准正交系 A, B 使得 $\dot{\mu}(t)$ 可写做

$$\dot{\mu}(t) = \langle \dot{\mu}(t), A\rangle A + \langle \dot{\mu}(t), B\rangle B \qquad (1)$$

$c = E_p \circ \lambda$ 是测地线，$L(c) = \|v\|$. 对于 $\gamma = E_p \circ \mu$，首先是

$$\dot{\gamma} = \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right) = (E_p)_* \circ \mu_*\left(\frac{d}{dt}\right) = (E_p)_* \dot{\mu}$$

故由(1)得

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = \|(E_p)_* \dot{\mu}\|^2 = \|(E_p)_*(\langle \dot{\mu}, B\rangle B + \langle \dot{\mu}, A\rangle A)\|^2$$
$$= \langle \dot{\mu}, B\rangle^2 \|(E_p)_*(B)\|^2$$
$$+ 2\langle \dot{\mu}, B\rangle\langle \dot{\mu}, A\rangle\langle (E_p)_*(B), (E_p)_*(A)\rangle$$
$$+ \langle \dot{\mu}, A\rangle^2 \|(E_p)_*(A)\|^2$$

然由高斯引理(p.90)知

$$\langle (E_p)_*(B), (E_p)_*(A)\rangle = \langle B, A\rangle = 0$$
$$\|(E_p)_*(A)\|^2 = \|A\|^2 = 1$$

故得

$$\|\dot{\gamma}\|^2 = \langle \dot{\mu}, B\rangle^2 \|(E_p)_*(B)\|^2 + \langle \dot{\mu}, A\rangle^2 \qquad (2)$$

从而

$$\|\dot{\gamma}\| \geq |\langle \dot{\mu}, A\rangle|. \qquad (3)$$

在这里明确一下 $T_p(M)$ 做为欧氏空间的结构。$T_p(M)$ 可看做坐标

系为

$$y^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_p \in T_p(M) \to (y^1, \cdots, y^n) \in \mathbf{R}^n$$

的微分流形，以及以

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y^\lambda}, \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right\rangle = g_{\lambda\mu}(p) \quad (\text{常数})$$

为度量张量的欧氏空间。原因是 $g_{\lambda\mu}(p)$ 与y无关。

再者，设$\mu(t) = y^\lambda(\partial/\partial x^\lambda)_p$，则

$$\|\mu(t)\|^2 = \langle \mu(t), \mu(t) \rangle = g_{\lambda\mu}(p) y^\lambda y^\mu$$

故

$$\frac{d}{dt}\|\mu(t)\| = \frac{g_{\alpha\beta}(p)\dot{y}^\alpha y^\beta}{(g_{\lambda\mu}(p) y^\lambda y^\mu)^{\frac{1}{2}}}$$

另一方面，$A, \dot{\mu}(t) \in T_{\mu(t)}(T_p(M))$ 由

$$A = \frac{y^\alpha}{(g_{\lambda\mu}(p) y^\lambda y^\mu)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\mu(t)}, \qquad \dot{\mu}(t) = \dot{y}^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda}\right)_{\mu(t)}$$

可见

$$\langle \dot{\mu}(t), A \rangle = \frac{d}{dt}\|\mu(t)\|$$

将此式代入(3)，则得

$$\|\dot{\gamma}\| \geqslant \left|\frac{d}{dt}\|\mu\|\right|$$

故

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\| dt \geqslant \int_0^1 \left|\frac{d}{dt}\|\mu\|\right| dt$$

$$\geqslant \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}\|\mu\|\right) dt = \|\mu(1)\| - \|\mu(0)\|$$

$$= \|v\| = L(c)$$

（ii） 设 $L(\gamma) = L(c)$，因在 (3) 式里必须等号成立，故

$$\langle \dot{\mu}, B \rangle \|(E_p)_*(B)\|^2 = 0$$

因此得$\langle \dot{\mu}, B\rangle = 0$或$(E_p)_*(B) = 0$。根据$E_p$的正则性，从后者得$B = 0$。不论哪一种情况，代入(1)得

$$\dot{\mu}(t) = \langle \dot{\mu}(t), A\rangle A$$

考虑关于$T_p(M)$的坐标系$\{y^\lambda\}$，得

$$\dot{y}^\lambda = f(t) y^\lambda$$

的形状，积分之得$y^\lambda = c^\lambda \exp\int f(t)dt$。故$\mu$为直线，与$\lambda$重合，从而对$c$与$\gamma$来说其象一致。

21. 从$\nabla_{\dot{c}} X_2 = -\kappa_1 X_1 + \kappa_2 X_3 = 0$得$\kappa_1 = 0$（其实当$\kappa_1 = 0$时，$X_2$不定）。

22. 设c：$x^\lambda = x^\lambda(t)$，则$\xi^\lambda = dx^\lambda/dt$。因$\xi^\lambda$为开玲向量，故

$$\nabla_\lambda \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\lambda = 0$$

与ξ^μ作积和，得

$$0 = \frac{1}{2}\nabla_\lambda(\xi^\mu \xi_\mu) + \xi^\mu \nabla_\mu (g_{\lambda\alpha}\xi^\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\nabla_\lambda(\xi^\mu \xi_\mu) + g_{\lambda\alpha}\frac{dx^\mu}{dt}\nabla_\mu \xi^\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\nabla_\lambda(\xi^\mu \xi_\mu) + g_{\lambda\alpha}\frac{\delta}{\delta t}\ \frac{dx^\alpha}{dt}$$

因$\nabla_{\dot{c}}\dot{c}$的分量为$\dfrac{\delta}{\delta t}\ \dfrac{dx^\alpha}{dt}$，故上式说明它的共变分量为梯度的分量。

23.
$$0 = \frac{d}{ds}(c(s) + f(s)X_2) = \dot{c} + \dot{f}X_2 + f\frac{d}{ds}X_2$$

考虑关于E^n的直交坐标系，因$\nabla_{\dot{c}} = \dfrac{d}{ds}$，故

$$\frac{d}{ds}X_2 = -\kappa_1 X_1 + \kappa_2 X_3$$

因此得

$$0=\dot{c}+\dot{f}X_2+f(-\kappa_1X_1+\kappa_2X_3)$$
$$=(1-f\kappa_1)X_1+\dot{f}X_2+f\kappa_2X_3$$

于是$1-f\kappa_1=0$，$\dot{f}=0$，$f\kappa_2=0$。

$\therefore$ $f=a$（常数 $\neq 0$），$\kappa_1=1/a$，$\kappa_2=0$。故 c 为黎曼圆（普通的圆）$c(s)+\frac{1}{a}X_2$ 为定点（圆心）。

24. 只要证出 $\langle X_i,X_{k+1}\rangle=0$，$i=1,\cdots,k$ 即可.

$$\kappa_{k-1}X_{k-1}+\nabla_{\dot{c}}X_k=\kappa_kX_{k+1}$$

的两边与 X_i 作内积，则

$$\kappa_{k-1}\langle X_{k-1},X_i\rangle+\langle\nabla_{\dot{c}}X_k,X_i\rangle=\kappa_k\langle X_{k+1},X_i\rangle,$$
$$i=1,\cdots,k \tag{1}$$

另外，求 $\langle X_i,X_k\rangle=\delta_{ik}$ 的导数得

$$\langle\nabla_{\dot{c}}X_i,X_k\rangle=-\langle X_i,\nabla_{\dot{c}}X_k\rangle. \tag{2}$$

在(2)里令 $i=k$，则

$$\langle X_k,\nabla_{\dot{c}}X_k\rangle=0, \tag{3}$$

在（1）里令 $i=k$ 并且用(3)，则

$$\langle X_{k+1},X_k\rangle=0.$$

其次，在（2）里令 $i=k-1$，则

$$\langle X_{k-1},\nabla_{\dot{c}}X_k\rangle=-\langle\nabla_{\dot{c}}X_{k-1},X_k\rangle$$
$$=\langle\kappa_{k-2}X_{k-2}-\kappa_{k-1}X_k,X_k\rangle=-\kappa_{k-1}$$

在(1)里令 $i=k-1$ 并且用上式得

$$\langle X_{k+1},X_{k-1}\rangle=0.$$

当$i=1,\cdots,k-2$时

$$\langle\nabla_{\dot{c}}X_k,X_i\rangle=-\langle X_k,\nabla_{\dot{c}}X_i\rangle$$
$$=\langle X_k,\kappa_{i-1}X_{i-1}-\kappa_iX_{i+1}\rangle=0$$

与(1)一道得

$$\langle X_{k+1},X_i\rangle=0$$

25. 根据§22 例题2知，$X_1,\cdots,X_i$ 张成的平面与 $Y_1,\cdots,Y_i$ 张

成的平面一致，故得 $X_i=\sum A_{ij}Y_j$ 的形状。由例题 2 的证明可得A_{ii}，A_{11}。

习题六解答（pp.99～103）

1. 从诱导度量的定义来看显然．也可通过计算得到，见如下讨论。从 $X=\xi^\lambda\partial/\partial x^\lambda=\bar{\xi}^a\partial/\partial u^a$ 得 $\xi^\lambda=B_a{}^\lambda\bar{\xi}^a$. 对于 Y 也一样，故 $\bar{g}_{ab}\bar{\xi}^a\bar{\eta}^b=(g_{\lambda\mu}B_a{}^\lambda B_b{}^\mu)\bar{\xi}^a\bar{\eta}^b=g_{\lambda\mu}\xi^\lambda\eta^\mu$.

2. （i） 左边 $=\bar{g}_{ab}B^a{}_\mu=g_{\alpha\lambda}B_a{}^\alpha B_b{}^\lambda B^a{}_\mu$

$$=g_{\alpha\lambda}(\delta_\mu{}^\alpha-\sum N_{A\mu}N_A{}^\alpha)B_b{}^\lambda=g_{\mu\lambda}B_b{}^\lambda=\text{右边}.$$

（ii） (i)的两边与 $\bar{g}^{bc}$ 作积和，则得 $\bar{g}^{bc}\bar{g}_{ab}B^a{}_\mu=\bar{g}^{bc}g_{\mu\lambda}B_b{}^\lambda$，∴ $B^c{}_\mu=\bar{g}^{cb}g_{\mu\lambda}B_b{}^\lambda$. 其次(i)与 $g^{\mu\nu}$ 作积和得$g^{\mu\nu}\bar{g}_{ab}B^a{}_\mu=g^{\mu\nu}g_{\lambda\mu}B_b{}^\lambda=B_b{}^\nu$.

（iii） 令 $g'^{ab}=B^a{}_\lambda B^b{}_\mu g^{\lambda\mu}$ 来说明(g'^{ab})是$(\bar{g}_{bc})$的逆矩阵.

$$g'^{ab}\bar{g}_{bc}=(B^a{}_\lambda B^b{}_\mu g^{\lambda\mu})\bar{g}_{bc}=(\bar{g}_{bc}B^b{}_\mu)B^a{}_\lambda g^{\lambda\mu}$$
$$=(g_{\mu\nu}B_c{}^\nu)B^a{}_\lambda g^{\lambda\mu}=(g_{\mu\nu}g^{\lambda\mu})B_c{}^\nu B^a{}_\lambda=B_c{}^\lambda B^a{}_\lambda=\delta_c{}^a.$$

可见(g'^{ab})为$(\bar{g}_{bc})$的逆矩阵．而且$(\bar{g}^{ab})$也是逆矩阵，故由逆矩阵的唯一性得 $g'^{ab}=\bar{g}^{ab}$.

（iv） 令$N'_{B\mu}=g_{\mu\lambda}N_B{}^\lambda$，则$N_A{}^\lambda N'_{B\lambda}=N_A{}^\lambda g_{\mu\lambda}N_B{}^\mu=\delta_{AB}$，$B_a{}^\lambda N'_{A\lambda}=B_a{}^\lambda g_{\lambda\mu}N_A{}^\mu=0$。故 $N'_{A\lambda}$ 满足(23.8)，(23.9)中以 $N'_{A\lambda}$ 代替 $N_{A\lambda}$ 而得之式。此事说明矩阵$(B^a{}_\lambda,N'_{A\lambda})$为$(B_a{}^\lambda,N_A{}^\lambda)$的逆矩阵，故由逆矩阵的唯一性得 $N_{A\lambda}=N'_{A\lambda}$。

3. $\bar{g}_{ab}=g_{\lambda\mu}B_a{}^\lambda B_b{}^\mu$ 对 u^c 求偏导数得

$$\frac{\partial\bar{g}_{ab}}{\partial u^c}=B_c{}^\nu\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}B_a{}^\lambda B_b{}^\mu+g_{\lambda\mu}\left(\frac{\partial B_a{}^\lambda}{\partial u^c}B_b{}^\mu+B_a{}^\lambda\frac{\partial B_b{}^\mu}{\partial u^c}\right)$$

注意 $g_{\lambda\mu}=g_{\mu\lambda}$ 以及

$$\frac{\partial B_a{}^\lambda}{\partial u^c}=\frac{\partial^2x^\lambda}{\partial u^a\partial u^c}=\frac{\partial B_c{}^\lambda}{\partial u^a}$$

可得

$$\overline{[ab,c]}=g_{\lambda\mu}B_c{}^\lambda\frac{\partial B_a{}^\mu}{\partial u^b}+B_a{}^\lambda B_b{}^\mu B_c{}^\nu[\lambda\mu,\nu]$$

此式两边与 $\bar{g}^{ce}=B^c{}_\alpha B^e{}_\beta g^{\alpha\beta}$ 作积和即可。

4. 因 $T_a{}^\lambda\xi^a\eta_\lambda$ 是数量函数，故

$$\bar{\nabla}_b(T_a{}^\lambda\bar{\xi}^a\eta_\lambda)=\frac{\partial}{\partial u^b}(T_a{}^\lambda\bar{\xi}^a\eta_\lambda)$$

$$=\frac{\partial T_a{}^\lambda}{\partial u^b}\bar{\xi}^a\eta_\lambda+T_a{}^\lambda\frac{\partial\bar{\xi}^a}{\partial u^b}\eta_\lambda+T_a{}^\lambda\bar{\xi}^a\frac{\partial\eta_\lambda}{\partial u^b}$$

然而

$$\frac{\partial T_a{}^\lambda}{\partial u^b}=\bar{\nabla}_b T_a{}^\lambda+\overline{\left\{\begin{matrix}c\\ba\end{matrix}\right\}}T_c{}^\lambda-\left\{\begin{matrix}\lambda\\\mu\nu\end{matrix}\right\}T_a{}^\nu B_b{}^\mu,$$

$$\frac{\partial\bar{\xi}^a}{\partial u^b}=\bar{\nabla}_b\bar{\xi}^a-\overline{\left\{\begin{matrix}a\\bc\end{matrix}\right\}}\bar{\xi}^c,\qquad\frac{\partial\eta_\lambda}{\partial u^b}=\bar{\nabla}_b\eta_\lambda+\left\{\begin{matrix}\nu\\\mu\lambda\end{matrix}\right\}B_b{}^\mu\eta_\nu$$

将这些式子代入之，并加整理。

5. 对于超曲面 $H_{ab}{}^\lambda=H_{ab}N^\lambda$，故

$$0=H_{ab}{}^\lambda H_{cd\lambda}\bar{\xi}^a\bar{\xi}^c\bar{\eta}^b\bar{\eta}^d=H_{ab}\bar{\xi}^a\bar{\eta}^b\bar{H}_{cd}\bar{\xi}^c\bar{\eta}^d=(\bar{H}_{ab}\bar{\xi}^a\bar{\eta}^b)^2$$

6. 在前题里令 $\bar{\xi}^a=\bar{\eta}^a$。

7. 在 U^+_{n+1}，球面以

$$x^\lambda=x^\lambda(u^a),\quad\lambda=1,\cdots,n+1;\ a=1,\cdots,n$$

表示之，则

$$x^a=u^a$$

$$x^{n+1}=\{k^2-\sum(x^a)^2\}^{\frac{1}{2}}=\{k^2-\sum(u^a)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

显然 $B_a{}^b=\delta_a{}^b$。$B_a{}^{n+1}$ 可通过

$$(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=k^2\tag{1}$$

对 x^a 求偏导数得到。单位法向量 N^λ 从

$$g_{\lambda\mu}B_a{}^\lambda N^\mu=0,\qquad g_{\lambda\mu}N^\lambda N^\mu=1$$

来求。在 E^{n+1} 里 $g_{\lambda\mu}=\delta_{\lambda\mu}$，故

$$\sum B_a{}^\lambda N^\lambda=0\tag{2}$$

$$\sum(N^\lambda)^2=1\tag{3}$$

将 $B_a{}^\lambda$ 的值代入(2)，可见 N^λ 具有 $N^a=\rho x^a$，$N^{n+1}=\rho x^{n+1}$ 的形状，

代入(3)得

$$N^{\lambda} = \frac{1}{k} x^{\lambda} \tag{4}$$

第二基本张量是

$$H_{bc}{}^{\lambda} = H_{bc}N^{\lambda} = \overline{\nabla}_b B_c{}^{\lambda} = \frac{\partial B_c{}^{\lambda}}{\partial u^b} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} B_b{}^{\mu} B_c{}^{\nu} - \overline{\left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\}} B_a{}^{\lambda}$$

然因

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = 0, \overline{\left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\}} = \frac{x^a}{k^2} \overline{g}_{bc} \quad (参照\S 13例题2,p.42)$$

故运用(1)～(4)可得 $H_{bc} = -(1/k)\overline{g}_{bc}$。

8. 因为 $X = \xi^{\lambda} = (0,\cdots,0,1)$，所以 $\xi^a = 0$，$\xi^{n+1} = 1$。从 X 诱导的向量场 $Y = (\eta^a)$ 可由

$$\xi^{\lambda} = B_a{}^{\lambda}\eta^a + fN^{\lambda} \tag{1}$$

得到。运用前题，当 $\lambda = b$ 时，$0 = \eta^b + fN^b$。故

$$\eta^b = -(f/k)x^b \tag{2}$$

其次在(1)里令 $\lambda = n+1$，则

$$1 = -\sum \frac{x^a}{x^{n+1}}\eta^a + \frac{f}{k}x^{n+1}$$

$$= \frac{f}{kx^{n+1}}\left(\sum (x^a)^2 + (x^{n+1})^2\right) = \frac{kf}{x^{n+1}}$$

故得 $f = x^{n+1}/k$，代入 (2) 得 $\eta^b = -x^{n+1}x^b/k^2$。

9. 对于 $\overline{M}^m$ 的任意曲线，(24.1)即

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\lambda}}{ds} = H_{ab}{}^{\lambda}\frac{du^a}{ds}\frac{du^b}{ds} + B_a{}^{\lambda}\frac{\overline{\delta}}{\delta s}\frac{du^a}{ds} \tag{1}$$

成立。另一方面，渐近曲线的条件是

$$H_{ab}{}^{\lambda}\frac{du^a}{ds}\frac{du^b}{ds} = 0$$

故由 (1) 可见，绝对曲率向量（左边）与$\overline{M}^m$相切。

10. 根据前题(1)。

11. 设在p处三个不同方向为X, Y, Z。若$X=(\xi^\lambda)=(B_a{}^\lambda\bar{\xi}^a)$方向的测地线含于$\overline{M}^2$，则也可看做$\overline{M}^2$的曲线，由前题知

$$H_{ab}{}^\lambda \frac{du^a}{dt}\frac{du^b}{dt}=0$$

特别在p处得$H_{ab}{}^\lambda\bar{\xi}^a\bar{\xi}^b=0$。同理，对于$Y=(\bar{\eta}^a)$，$Z=(\bar{\zeta}^a)$也有$H_{ab}{}^\lambda\bar{\eta}^a\bar{\eta}^b=0$，$H_{ab}{}^\lambda\bar{\zeta}^a\bar{\zeta}^b=0$。然因$T_p(\overline{M})$是二维的，故有

$$\bar{\zeta}^a=\lambda\bar{\xi}^a+\mu\bar{\eta}^a,\qquad \lambda\neq 0,\ \mu\neq 0$$

的形状。从而$H_{ab}{}^\lambda\bar{\xi}^a\bar{\eta}^b=0$也成立。因为$T_P(\overline{M})$的元总是$X$，$Y$的线性组合，所以对于任意的实数$t^a$，$H_{ab}{}^\lambda t^a t^b=0$成立，故得$H_{ab}{}^\lambda=0$。

12. 关于E^n的直交坐标系$\{x^\lambda\}$，设超曲面$\overline{M}^{n-1}$由$x^\lambda=x^\lambda(u^a)$给定。从$H_{ba}{}^\lambda=0$与温加顿公式(23.22)知$\overline{\nabla}_b N^\lambda=0$. 故$\partial N^\lambda/\partial u^b=0$。现在考虑$\overline{M}^{n-1}$的一定点$p_0(x_0)$与一动点$p(x)$，因

$$\frac{\partial}{\partial u^b}\sum N^\lambda(x^\lambda-x_0{}^\lambda)=\sum N^\lambda B_b{}^\lambda=0$$

故$\sum N^\lambda(x^\lambda-x_0{}^\lambda)=c$（常数）对$\overline{M}^{n-1}$的任何点$x$成立。特别令$x^\lambda=x_0{}^\lambda$得$c=0$，故

$$\sum N^\lambda(x^\lambda-x_0{}^\lambda)=0$$

因此，$\overline{M}^{n-1}$上的点满足常系数$N^1,\cdots,N^n$的一次式，故包含于E^n的一超平面$\widetilde{M}$中。又因流形$\overline{M}^{n-1}$的各点具有与$(n-1)$维圆盘同胚的邻域，故为$\widetilde{M}$的开集。

13. 对于$\overline{M}^{n-1}$: $x^n=$一定的局部坐标$u^a=x^a$，

$$B_a{}^\lambda=\begin{cases}\delta_a{}^b, & \text{当 } \lambda=b \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \lambda=n \text{ 时}\end{cases}$$

故诱导度量为$\bar{g}_{ab}=g_{ab}$。其次注意在

$$H_{bc}{}^{\lambda} = \frac{\partial B_c{}^{\lambda}}{\partial u^b} - \overline{\left\{ {a \atop bc} \right\}} B_a{}^{\lambda} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} B_b{}^{\mu} B_c{}^{\nu}$$

$$= -\left\{ {a \atop bc} \right\} B_a{}^{\lambda} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} B_b{}^{\mu} B_c{}^{\nu} \qquad (1)$$

里$\left\{ {n \atop bc} \right\} = \left\{ {c \atop bn} \right\} = 0$ 等(参照习题三第 32 题)，可见，$H_{ab}{}^{n} = 0$，$H_{ab}{}^{c} = 0$。

14. 关于曲面 $x^i = a^i$（= 一定）的局部坐标 $u^a = x^a$，曲面的方程 $x^{\lambda} = x^{\lambda}(u^a)$ 是

$$x^a = u^a, \qquad x^i = a^i$$

故

$$B_a{}^{\lambda} = \begin{cases} \delta_a{}^b, & 当\ \lambda = b\ 时, \\ 0, & 当\ \lambda = i\ 时. \end{cases}$$

诱导度量就是 g_{ab}。至于 $H_{bc}{}^{\lambda}$，因前题(1)成立，故分别在 $\lambda = a$，$\lambda = i$ 的情况下运用$\left\{ {i \atop ab} \right\} = \left\{ {c \atop aj} \right\} = 0$ 等可见 $H_{bc}{}^{\lambda} = 0$。

15. $B_a{}^{\lambda}$ 与第 13 题解答中的 $B_a{}^{\lambda}$ 一样。诱导度量 $\overline{g}_{bc}$，法线向量 N^{λ} 分别为

$$\overline{g}_{bc} = (x^n)^2 \overset{*}{g}_{bc}, \qquad \overline{g}^{bc} = (x^n)^{-2} \overset{*}{g}^{bc},$$
$$N^a = 0, \qquad N^n = 1.$$

计算 $H_{ab}{}^{\lambda}$ 得

$$H_{ba}{}^{n} = -\frac{1}{x^n}\overline{g}_{ba} = -\frac{1}{x^n}N^n\overline{g}_{ba}, \quad H_{ba}{}^{c} = 0 = -\frac{1}{x^n}N^c\overline{g}_{ba}$$

故 $H_{ab}{}^{\lambda} = -(1/x^n)N^{\lambda}\overline{g}_{ba}$ 成立，可见为全脐曲面。

16. 温加顿方程变为

$$\overline{\nabla}_a N^{\lambda} = \frac{\partial N^{\lambda}}{\partial u^a} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} B_a{}^{\mu} N^{\nu} = \frac{\partial N^{\lambda}}{\partial u^a}$$
$$= -H_a{}^b B_b{}^{\lambda}$$

故

$$\frac{\partial N^\lambda}{\partial u^a} = -kB_a{}^\lambda = -k\delta_a{}^b B_b{}^\lambda \qquad (1)$$

$$(H_a{}^b - k\delta_a{}^b)B_b{}^\lambda = 0$$

即与脐点的条件 $H_a{}^b = k\delta_a{}^b$ 等价。

17. 运用前题。在 $z>0(<0)$ 取 x，y 为局部坐标

$$(B_a{}^\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{c^2 x}{a^2 z} & -\dfrac{c^2 y}{b^2 z} \end{pmatrix}$$

现在令

$$f = \left[\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

则单位法线向量 N^λ 由下式而定。

$$N^1 = \frac{x}{a^2 f}, \quad N^2 = \frac{y}{b^2 f}, \quad N^3 = \frac{z}{c^2 f}.$$

其次使用

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{a^2 f}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{b^2 f}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)$$

来计算 $\partial N^\lambda / \partial u^a$ 得

$$\frac{\partial N^1}{\partial x} = \frac{1}{a^2 f^3}\left(\frac{x^2}{a^2 c^2} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right),$$

$$\frac{\partial N^1}{\partial y} = -\frac{xy}{a^2 b^2 f^3}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right),$$

$$\frac{\partial N^2}{\partial x} = -\frac{xy}{a^2 b^2 f^3}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right),$$

$$\frac{\partial N^2}{\partial y} = \frac{1}{b^2 f^3}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^2 c^2} + \frac{z^2}{c^4}\right),$$

$$\frac{\partial N^3}{\partial x}=-\frac{x}{a^2zf^3}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^2a^2}\right),$$

$$\frac{\partial N^3}{\partial y}=-\frac{y}{b^2zf^3}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^2b^2}\right).$$

为运用前题，想求

$$\frac{\partial N^\lambda}{\partial u^\alpha}=-kB_\alpha{}^\lambda$$

成立的点。首先从

$$\frac{\partial N^1}{\partial x}=-kB_1{}^1=-k=-kB_2{}^2=\frac{\partial N^2}{\partial y}$$

得

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2c^2}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)$$

$$=\frac{1}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^2c^2}+\frac{z^2}{c^4}\right) \qquad (1)$$

再从

$$\frac{\partial N^1}{\partial y}=-kB_2{}^1=0=-kB_1{}^2=\frac{\partial N^2}{\partial x}$$

因$a>b$，故得 $xy=0$。当 $x=0$ 时，(1)变为

$$0>\frac{y^2}{b^2}\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)=\frac{z^2}{c^4}(a^2-b^2)>0$$

这不合理。故 $x\neq0$，$y=0$，因此由(1)可得

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2c^2}+\frac{z^2}{c^4}\right)=\frac{1}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}\right),$$

$$\frac{x^2}{a^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{z^2}{c^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right), \qquad (2)$$

注意此处的 x 与 z 做为曲面上的点，满足

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)$$

解之得

$$x=\pm\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},\quad y=0,\quad z=\pm\frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} \tag{4}$$

这时得

$$-k=\frac{\partial N^1}{\partial x}=\frac{1}{c^2a^2f^3}$$

另外，令 $y=0$ 使用(3)，

$$\frac{\partial N^3}{\partial x}=-\frac{x}{a^4zf^3}=-kB_1{}^3,\quad \frac{\partial N^3}{\partial y}=0=-kB_2{}^3$$

也成立。故(4)为脐点。

到目前为止没有考虑 $z=0$ 的点，为了讨论此处，在 $x>0(<0)$ 处，取y，z，为局部坐标。在方才的讨论里作文字的更换 $x\to y\to z\to x$，$a\to b\to c\to a$，而得之式成立，因有$a>b>c>0$的假设，故可验证除(4)以外再无脐点。

注意，在求椭球面这样二次曲面的脐点时，运用解析几何方法要简单得多。

18. 令 $u^1=x$，$u^2=y$，$u_x=\partial u/\partial x$，$u_{xy}=\partial^2u/\partial x\partial y$等，则

$$(B_a{}^\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix},\qquad a=1,2$$

由假设知，u,v 满足

$$u_x=v_y,\quad -u_y=u_x,\quad u_{xx}+u_{yy}=0,\quad v_{xx}+v_{yy}=0$$

度量张量由

$$\bar{g}_{bc}=\sum B_b{}^\lambda B_c{}^\lambda$$

可得

$$\bar{g}_{bc}=e^{2\rho}\delta_{bc},\quad e^{2\rho}=1+u_x{}^2+u_y{}^2$$

故 $\bar{g}_{ab}$ 与二维欧氏空间度量 δ_{ab} 处于共形对应之下，因此克氏记号为

$$\left\{\overline{\begin{matrix}a\\bc\end{matrix}}\right\} = \rho_b\delta_c{}^a + \rho_c\delta_b{}^a - \rho^a\delta_{bc} \qquad (1)$$

式中

$$\rho^a = \rho_b\delta^{ba} = \rho_a.$$

(1) 与 $\overline{g}^{bc}$ 作积和，则得

$$\overline{g}^{bc}\left\{\overline{\begin{matrix}a\\bc\end{matrix}}\right\} = e^{-2\rho}\delta^{bc}\left\{\overline{\begin{matrix}a\\bc\end{matrix}}\right\} = e^{-2\rho}(2\rho_a - 2\rho^a) = 0$$

由此可见

$$H^\lambda = \overline{g}^{bc}H_{bc}{}^\lambda = \overline{g}^{bc}\left(\frac{\partial B_c{}^\lambda}{\partial u^b} - \left\{\overline{\begin{matrix}a\\bc\end{matrix}}\right\}B_a{}^\lambda\right) = \overline{g}^{bc}\frac{\partial B_c{}^\lambda}{\partial u^b}$$

$$= e^{-2\rho}\left(\frac{\partial B_1{}^\lambda}{\partial x} + \frac{\partial B_2{}^\lambda}{\partial y}\right).$$

故得 $H^1 = H^2 = 0$，$H^3 = e^{-2\rho}(u_{xx} + u_{yy}) = 0$，$H^4 = e^{-2\rho}(v_{xx} + v_{yy}) = 0$，因此是极小曲面。

19. 超曲面的柯达齐方程

$$R_{\lambda\mu\nu\omega}B_a{}^\lambda B_b{}^\mu B_c{}^\nu N^\omega = \overline{\nabla}_a H_{bc} - \overline{\nabla}_b H_{ac}$$

与 $\overline{g}^{bc}$ 作积和并运用下式.

$$\overline{g}^{bc}B_b{}^\mu B_c{}^\nu = g^{\mu\nu} - N^\mu N^\nu, \quad R_{\lambda\mu\nu\omega}N^\nu N^\omega = 0$$

20. 运用前题。将 $R_{\lambda\mu} = (R/n)g_{\lambda\mu}$，$H_{ac} = (H/(n-1))\overline{g}_{ac}$ 代入之得

$$\frac{R}{n}g_{\lambda\mu}B_a{}^\lambda N^\mu = 0 = \frac{n-2}{n-1}\overline{\nabla}_a H$$

21. 因为是全脐曲面，故由定理 25.2（黎曼几何 *p*.161）的证明得

$$\overline{R}_{abc}{}^f = -(k + C_\lambda C^\lambda)(\overline{g}_{ac}\delta_b{}^f - \overline{g}_{bc}\delta_a{}^f) \qquad (1)$$

因为讨论的曲面是二维的，所以需要证明 $k + C_\lambda C^\lambda$ 为常数。由前题知是固有的，故 $C_\lambda C^\lambda$ = 一定。因此是常曲率空间。

22. 根据前题解答(1)。$k \geqslant 0$ 与 $k + C_\lambda C^\lambda < 0$ 不能共存。

23. 若向量 $X = (\xi^\lambda)$ 与曲面相切，则有 $\xi^\lambda = B_a{}^\lambda\eta^a$ 的形状。对于

全测地曲面，高斯方程变为

$$\overline{R}_{abc}{}^{e} = R_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega} B_a{}^{\lambda} B_b{}^{\mu} B_c{}^{\nu} B^e{}_{\omega}$$

因此得

$$R_{abc}{}^{e}\eta^{a} = R_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega}\xi^{\lambda} B_b{}^{\mu} B_c{}^{\nu} B^e{}_{\omega} \tag{1}$$

再从黎曼几何 p.156 得

$$\overline{\nabla}_c \eta^e = B_c{}^{\nu} B^e{}_{\omega} \nabla_{\nu} \xi^{\omega}.$$

用 $\overline{\nabla}_b$ 运算之，因 $\overline{\nabla}_b B_c{}^{\nu} = \overline{\nabla}_b B^e{}_{\omega} = 0$，故

$$\overline{\nabla}_b \overline{\nabla}_c \eta^e = B_c{}^{\nu} B^e{}_{\omega} \overline{\nabla}_b \nabla_{\nu} \xi^{\omega} = B_b{}^{\mu} B_c{}^{\nu} B^e{}_{\omega} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \xi^{\omega}$$

与(1)边边相加得

$$\overline{\nabla}_b \overline{\nabla}_c \eta^e + R_{abc}{}^{e}\eta^{a} = B_b{}^{\mu} B_c{}^{\nu} B^e{}_{\omega} (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\xi^{\omega} + R_{\lambda\mu\nu}{}^{\omega}\xi^{\lambda}).$$

如 X 为 M^n 的仿射开玲向量，则右边为 0，故 X 为 $\overline{M}^m$ 的仿射开玲向量。

24. 在点 p 的邻域里考虑。因(1)完全可积，故若在 p 任意给定向量$(v^{\lambda}) \neq 0$，则存在以 $v_{\lambda} = g_{\lambda\mu}(p)v^{\mu}$ 为初始值的(1)的解。又因$\nabla_{\mu}v_{\nu} = \nabla_{\nu}v_{\mu}$，故由黎曼几何 § 13 例 2 知在 p 的邻域里存在 $v_{\lambda} = \partial f/\partial x^{\lambda}$ 的函数 f。因为 $(v_{\lambda}(p) \neq 0$，例如设 $v_n \neq 0$，则在 p 的附近 $f(x) = a(= f(x(p)))$ 可解为 $x^n = \phi(x^1, \cdots, x^{n-1})$的形状，作成 $n-1$ 维（超）曲面。

将曲面 $f(x) = a$ 表示为 $x^{\lambda} = x^{\lambda}(u^b)$，则

$$f(x(u)) = a.$$

对 u^b 求偏导数得 $(\partial f/\partial x^{\lambda})B_b{}^{\lambda} = 0$，即

$$B_b{}^{\lambda} v_{\lambda} = 0 \tag{2}$$

成立，故存在

$$v^{\lambda} = \rho(u) N^{\lambda}$$

的函数 ρ。在曲面上将 (2) 共变微分之得

$$H_{ba}{}^{\lambda} v_{\lambda} + B_b{}^{\mu} B_a{}^{\lambda} \nabla_{\mu} v_{\lambda} = 0.$$

将(1)代入之并运用(2)，则

$$0 = H_{ba} N^{\lambda} v_{\lambda} + B_b{}^{\mu} B_a{}^{\lambda} (k g_{\mu\lambda} + v_{\mu} v_{\lambda})$$

$$= \rho H_{ba} + k\bar{g}_{ba}$$

因此得

$$H_{ba} = -(k/\rho)\bar{g}_{ba} \qquad (3)$$

这说明是全脐曲面。若 $k=0$，则是固有的，既使 $k\neq0$ 也是固有的，可证明如下。根据柯达齐方程(25.10)

$$R_{\lambda\mu\nu\omega}B_a{}^\lambda B_b{}^\mu B_c{}^\nu N^\omega = \bar{\nabla}_a H_{bc} - \bar{\nabla}_b H_{ac}$$

对于常曲率空间，左边为0。将(3)代入右边得

$$0 = -k\left\{\bar{g}_{bc}\frac{\partial}{\partial u^a}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \bar{g}_{ac}\frac{\partial}{\partial u^b}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}$$

与 $\bar{g}^{bc}$ 作积和（设 $n>2$），则得 $\rho=$常数。

25. 记 $\bar{\nabla}_a H_{bc} = H_{abc}$，则

$$H_{abc} = H_{acb}$$

成立。$\bar{\nabla}_a$ 运算在(2)上，则得

$$\bar{\nabla}_a R_{bcde} = H_{abe}H_{cd} + H_{be}H_{acd} - H_{ace}H_{bd} - H_{ce}H_{abd}$$

交换下标 $a\to b\to c\to a$ 得

$$\bar{\nabla}_b R_{cade} = H_{bce}H_{ad} + H_{ce}H_{bad} - H_{bae}H_{cd} - H_{ae}H_{bcd}$$

$$\bar{\nabla}_c R_{abde} = H_{cae}H_{bd} + H_{ac}H_{cbd} - H_{cbe}H_{ad} - H_{be}H_{cad}$$

边边相加，根据比安基恒等式知左边为0，故令

$$A_{abe} = H_{abe} - H_{bae} = -A_{bae}$$

则得下式。

$$A_{abe}H_{cd} + A_{bce}H_{ad} + A_{cae}H_{bd} + H_{be}A_{acd}$$
$$+ H_{ce}A_{bad} + H_{ae}A_{cbd} = 0 \qquad (3)$$

根据假设，矩阵 (H_{ab}) 正则，设逆矩阵为(K^{ab})，则 $K^{ab}=K^{ba}$，而且

$$K^{ab}H_{bc} = \delta_c{}^a,\quad K^{ab}H_{ab} = n-1.$$

(3)与 K^{cd} 作积和得

$$(n-4)A_{abe} + H_{be}K^{cd}A_{acd} - H_{ae}K^{cd}A_{bcd} = 0 \qquad (4)$$

再与 K^{be} 作积和得

$$2(n-3)K^{be}A_{abe} = 0$$

因为 $n>4$，所以 $K^{be}A_{abe}=0$。将此式代入(4)得$A_{abe}=0$，即 $\overline{\nabla}_a H_{be}-\overline{\nabla}_b H_{ae}=0$。

26. 由柯达齐方程（前题(1)）知，$\overline{\nabla}_b H_c{}^a=\overline{\nabla}_c H_b{}^a$。故 $H_b{}^a$ 满足习题三第 37 题的条件，因此 g' 的曲率张量由

$$R'_{abef}=\overline{R}_{abcd}H_e{}^c H_f{}^d$$

而定。根据高斯方程得

$$\overline{R}_{abcd}=H_{ad}H_{bc}-H_{ac}H_{bd}$$

故

$$\begin{aligned}R'_{abef}&=(H_{ad}H_{bc}-H_{ac}H_{bd})H_e{}^c H_f{}^d\\&=(H_{ad}H_f{}^d)(H_{bc}H_e{}^c)-(H_{ac}H_e{}^c)(H_{bd}H_f{}^d)\\&=g'_{af}g'_{be}-g'_{ae}g'_{bf}\end{aligned}$$

故 g' 为常曲率空间的度量。

习题七解答（pp.107～115）

1. 假设是可定向并不失普遍性。因为 $\Delta f=cf$，所以

$$\int_M f\Delta f d\sigma = c\int_M f^2 d\sigma$$

因为 f 为非 0 常数，故由 §26 例题 1 （p.104）知左边为负。然因 $\int_M f^2 d\sigma>0$，可见 $c<0$。

2. 将 $\nabla^\alpha\nabla_\alpha(f_1 f_2)=\nabla^\alpha\nabla_\alpha f_1\cdot f_2+\nabla_\alpha f_1\nabla^\alpha f_2$ 积分之。

3. 将 $Xf=\xi^\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}=\xi^\alpha\nabla_\alpha f=\nabla_\alpha(\xi^\alpha f)-f\nabla_\alpha\xi^\alpha=\nabla_\alpha(\xi^\alpha f)$

积分之。

4. 令 $f=\|T\|^2$，积分 Δf。例如当 T 为二阶张量的情况下，设 $f=T_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}$，则

$$\Delta f=2(\nabla^\alpha T_{\lambda\mu}\nabla_\alpha T^{\lambda\mu}+T^{\lambda\mu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha T_{\lambda\mu})$$

根据假设 $\nabla_\alpha\nabla_\beta T_{\lambda\mu}=0$，故

$$\Delta f=2(\nabla^\alpha T_{\lambda\mu}\nabla_\alpha T^{\lambda\mu}).$$

积分之得 $0=\int_M \|\nabla T\|^2 d\sigma$，因此$\nabla T=0$。

5. 考虑 TM 的决定邻域系作成的开复盖，则由 §6 例题 1 (p.18)知，坐标变换的矩阵是

$$\left(\frac{\partial x'^A}{\partial x^B}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} & 0\\[2ex] \dfrac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}y^\nu & \dfrac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\end{pmatrix}$$

的形状，故 $\det(\partial x'^A/\partial x^B)=\{\det(\partial x'^\lambda/\partial x^\mu)\}^2>0$。因此坐标系总是同向的。

6. 考虑满足定理 26.1 的条件的有限个箱 $V_p,\cdots,V_{p_k}$ 而成的复盖以及函数 $\phi_1,\cdots,\phi_k$。对于 $p\in\{V_{p_i},x^\lambda\}$ 处的向量 $(\xi^\lambda),(\eta^\lambda)$，定义 $g^{(i)}$ 为

$$g_p{}^{(i)}(X,Y)=\sum\xi^\lambda\eta^\lambda$$

则 $g^{(i)}$ 是V_{p_i}的黎曼度量。再令

$$g_p(X,Y)=\sum_{i=1}^k \phi_i(p)g_p{}^{(i)}(X,Y)$$

则在各点 p，g 满足度量张量的性质。因为 ϕ_i 在 V_{p_i} 之外为 0，故上式右边之和实际上只在含 p 的邻域，例如 V_{p_1}，$\cdots$，V_{p_r} 求和即可，因 $\phi_i g^{(i)}$ 在 V_{p_i} 是 C^∞ 级张量场，故在 $V_{p_1}\cap\cdots\cap V_{p_r}$ 也是 C^∞ 级。从而在流形的各点，g 是 C^∞ 级。

7. ∇^λ 运算在 $f_{\lambda\alpha}\nabla^\alpha\phi=\nabla_\lambda\psi$ 上得

$$\nabla^\lambda\nabla_\lambda\psi=f_{\lambda\alpha}\nabla^\lambda\nabla^\alpha\phi=(1/2)f_{\lambda\alpha}(\nabla^\lambda\nabla^\alpha\phi+\nabla^\alpha\nabla^\lambda\phi)=0$$

故由 §26 例题 2 (p.104) 知 $\psi=$ 常数。

8. 因 Γ 是度量联络，故

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}-g_{\alpha\mu}\Gamma_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}-g_{\lambda\alpha}\Gamma_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu}=0$$

现在令 $\Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu=\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}+t_{\mu\nu}{}^\lambda$，则从上式得

$$g_{\alpha\mu}t_{\nu\lambda}{}^{\alpha}+g_{\lambda\alpha}t_{\nu\mu}{}^{\alpha}=0$$

与 $g^{\lambda\mu}$ 作积和，则

$$t_{\nu\alpha}{}^{\alpha}=0.$$

关于$\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}$的共变导数以 $\mathring{\nabla}$表示之，则

$$\bar{\nabla}_\lambda\xi^\lambda=\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^\lambda}+\bar{\Gamma}_{\lambda}{}^{\lambda}{}_{\alpha}\xi^\alpha=\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^\lambda}+\Gamma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\lambda}\xi^\alpha$$

$$=\mathring{\nabla}_\lambda\xi^\lambda+t_{\alpha\lambda}{}^{\lambda}\xi^\alpha=\mathring{\nabla}_\lambda\xi^\lambda$$

可见

$$\int_M\bar{\nabla}_\lambda\xi^\lambda d\sigma=\int_M\mathring{\nabla}_\lambda\xi^\lambda d\sigma=0$$

9. （i） 在有关体积元素的积分定义里，$\sqrt{g}$的性质仅仅使用了权为 1 的相对数量性质。故可用 φ 代$\sqrt{g}$定义积分（参照 §26引理 4，5）。

（ii） 在坐标变换 $\{x^\lambda\}\to\{x'^\lambda\}$ 下，$\Gamma_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\alpha}$ 的变换规律为（参照习题三第 20 题）

$$\Gamma'_{\lambda}{}^{\lambda}{}_{\nu}=\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\Gamma_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\gamma}+\frac{\partial\log|\Delta|}{\partial x'^\nu},\qquad \Delta=\det(\partial x/\partial x')$$

另一方面根据 §9 例题 2（p.22）知 φ 的变换规律是

$$\varphi(x')=\Delta\varphi(x)$$

故令 $\varphi'=\varphi(x')$，则

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'^\nu}=\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\ \frac{\partial}{\partial x^\gamma}(\Delta\cdot\varphi)=\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x^\gamma}\varphi+\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial x^\gamma}\right)$$

因此

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'^\nu}-\varphi'\Gamma'_{\lambda}{}^{\lambda}{}_{\nu}=\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x^\gamma}\varphi+\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial x^\gamma}\right)$$

$$-\Delta\cdot\varphi\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\Gamma_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\gamma}+\frac{\partial\log|\Delta|}{\partial x'^\nu}\right)$$

$$=\Delta\cdot\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\gamma}-\varphi\Gamma_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\gamma}\right)$$

成立。

(iii) 令$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}=\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}+t_{\mu\nu}{}^{\lambda}$，则

$$\Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha}=\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda\alpha \end{matrix} \right\}+t_{\lambda\alpha}{}^{\alpha}=\frac{\partial\log\sqrt{g}}{\partial x^{\lambda}}+t_{\lambda},\quad t_{\lambda}=t_{\lambda\alpha}{}^{\alpha}.$$

由假设知

$$\Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\lambda}}=\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\log\varphi$$

故

$$t_{\lambda}=\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\log\frac{\varphi}{\sqrt{g}}$$

即得

$$\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\frac{\varphi}{\sqrt{g}}=\frac{\varphi}{\sqrt{g}}t_{\lambda}. \tag{1}$$

因 φ，$\sqrt{g}$都是权 1 的相对数量， 故 $\varphi/\sqrt{g}$是(权 0 的)数量函数。
其次，对于任意的 $X=(\xi^{\lambda})$，计算 $\overline{\nabla}_{\lambda}\xi^{\lambda}$，则得

$$\overline{\nabla}_{\lambda}\xi^{\lambda}=\frac{\partial\xi^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}}+\left(\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\lambda \end{matrix} \right\}+t_{\alpha}\right)\xi^{\alpha}=\mathring{\nabla}_{\lambda}\xi^{\lambda}+t_{\lambda}\xi^{\lambda} \tag{2}$$

式中$\mathring{\nabla}$表示关于黎曼联络的共变导数。从(1)，(2)得

$$\mathring{\nabla}_{\lambda}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{g}}\xi^{\lambda}\right)=\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{g}}\right)\xi^{\lambda}+\frac{\varphi}{\sqrt{g}}\mathring{\nabla}_{\lambda}\xi^{\lambda}$$

$$=\frac{\varphi}{\sqrt{g}}(t_{\lambda}\xi^{\lambda}+\mathring{\nabla}_{\lambda}\xi^{\lambda})=\frac{\varphi}{\sqrt{g}}\overline{\nabla}_{\lambda}\xi^{\lambda}$$

由格林定理知

$$0=\int_{M}\mathring{\nabla}_{\lambda}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{g}}\xi^{\lambda}\right)\sqrt{g}\,dx^{1}\cdots dx^{n}=\int_{M}\frac{\varphi}{\sqrt{g}}\overline{\nabla}_{\lambda}\xi^{\lambda}\sqrt{g}\,dx^{1}\cdots dx^{n}$$

$$=\int_{M}\overline{\nabla}_{\lambda}\xi^{\lambda}\varphi\,dx^{1}\cdots dx^{n}$$

通过分析积分的定义可见，式中最后的推导是允许的。

10. 共形开玲向量X满足(17.32)：

$$\Delta\rho=\nabla_\alpha\rho^\alpha=-\frac{1}{2(n-1)}(2\rho R+\mathscr{L}_X R)$$

因R为常数，故

$$\Delta\rho=-\frac{R}{n-1}\rho. \qquad (1)$$

根据§26例题1得

$$\int_M\rho\Delta\rho d\sigma=-\int_M\|\nabla\rho\|^2d\sigma$$

将(1)代入之得

$$\frac{R}{n-1}\int_M\rho^2d\sigma=\int_M\|\nabla\rho\|^2d\sigma$$

故若 $R<0$，则 $\rho=0$，X为开玲向量。若$R=0$，则ρ为常数，故X是相似开玲向量。然而相似开玲向量是仿射开玲向量，故由定理27.6知，X是开玲向量。

11. 在共形对应 $\overset{*}{g}_{\lambda\mu}=e^{2\rho}g_{\lambda\mu}$ 下，从(17.6)得

$$\overset{*}{R}_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-(n-2)\rho_{\mu\nu}-\rho_\alpha{}^\alpha g_{\mu\nu}$$

根据假设$\overset{*}{R}_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}$，故得$\rho_\alpha{}^\alpha=0$，

$$0=\rho_\alpha{}^\alpha=\nabla_\alpha\rho^\alpha+\frac{n-2}{2}\rho_\alpha\rho^\alpha$$

积分之得 $\rho=$常数。

注意。因此，在紧致M^n里满足$\mathscr{L}_X R_{\mu\nu}=0$的共形开玲向量是开玲向量。

12. 设ξ^λ为共形开玲向量，则

$$\nabla_\lambda\xi_\mu+\nabla_\mu\xi_\lambda=2\rho g_{\lambda\mu} \qquad (2)$$

与$g^{\lambda\mu}$作积和求ρ得

$$\rho=\nabla_\alpha\xi^\alpha/n$$

代入(2)得

$$A_{\lambda\mu}=\nabla_\lambda\xi_\mu+\nabla_\mu\xi_\lambda-(2/n)\nabla_\alpha\xi^\alpha g_{\lambda\mu}=0.$$

故 $\nabla^\lambda A_{\lambda\mu}=0$。根据 §27 例题 2 的计算得

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha\xi^\lambda+R_\alpha{}^\lambda\xi^\alpha+\left(1-\frac{2}{n}\right)\nabla^\lambda\nabla_\alpha\xi^\alpha=0 \qquad (1)$$

13. 令 $f=\|X\|^2=\xi_\lambda\xi^\lambda$,运用前题(1)得

$$\begin{aligned}(1/2)\Delta f&=\nabla_\mu\xi_\lambda\nabla^\mu\xi^\lambda+\xi_\lambda\nabla^\alpha\nabla_\alpha\xi^\lambda\\&=\|\nabla X\|^2+\xi_\lambda\left\{-R_\alpha{}^\lambda\xi^\alpha-\left(1-\frac{2}{n}\right)\nabla^\lambda\nabla_\alpha\xi^\alpha\right\}\\&=\|\nabla X\|^2-\mathrm{Ric}\,(X,X)-\left(1-\frac{2}{n}\right)\xi^\lambda\nabla_\lambda\nabla_\alpha\xi^\alpha.\end{aligned}$$

最后项变为

$$\begin{aligned}\xi^\lambda\nabla_\lambda\nabla_\alpha\xi^\alpha&=\nabla_\lambda(\xi^\lambda\nabla_\alpha\xi^\alpha)-\nabla_\lambda\xi^\lambda\nabla_\alpha\xi^\alpha\\&=\mathrm{div}((\mathrm{div}X)X)-(\mathrm{div}X)^2\end{aligned}$$

积分之得

$$\begin{aligned}&\int_M\mathrm{Ric}(X,X)d\sigma\\&=\int_M\left\{\|\nabla X\|^2+\left(1-\frac{2}{n}\right)(\mathrm{div}X)^2\right\}d\sigma\geqslant 0\end{aligned}$$

若利齐形式总是负定，则两边都是0。特别是 $\mathrm{Ric}(X,X)=0$。$\therefore X=0$。

14. 根据 §27 例题 2 及第 12 题。

15. 令 $A_{\lambda\mu}=\nabla_\lambda\xi_\mu-\nabla_\mu\xi_\lambda$，模仿 §27 例题 2。

16. 关于前题的 $A_{\lambda\mu}$，计算 $\nabla^\alpha A_{\alpha\lambda}=0$。

17. 根据第 15，16 题。

18. 令 $f=\|u_\lambda\|^2$，模仿第 13 题。

19. (i) 令 $f=\langle u,X\rangle=u_\lambda\xi^\lambda$，则

$$\nabla_\alpha f=(\nabla_\alpha u_\lambda)\xi^\lambda+u_\lambda\nabla_\alpha\xi^\lambda \qquad (1)$$

因 $\nabla_\alpha u_\lambda=\nabla_\lambda u_\alpha$，故

$$\nabla_\alpha f=\xi^\lambda\nabla_\lambda u_\alpha+u_\lambda\nabla_\alpha\xi^\lambda=\mathcal{L}_X u_\alpha \qquad (2)$$

其次用 ∇^α 运算在(1)上得

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha f=(\nabla^\alpha\nabla_\alpha u_\lambda)\xi^\lambda+2\nabla_\alpha u_\lambda\nabla^\alpha\xi^\lambda+u_\lambda\nabla^\alpha\nabla_\alpha\xi^\lambda$$
$$=R_\lambda{}^\alpha u_\alpha\xi^\lambda+0-u_\lambda R_\alpha{}^\lambda\xi^\alpha=0.$$

故由§26 例题 2 知 $f=$ 常数。(ii)由(2)可得。

20. 选择局部坐标系使在射影变换 ϕ 下的对应点具有相同坐标，则诱导联络有

$$\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}^*=\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}+\psi_\mu\delta_\nu{}^\lambda+\psi_\nu\delta_\mu{}^\lambda$$

的形状。这时，从(18.8)得

$$\overset{*}{R}_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-(n-1)\psi_{\mu\nu}$$

根据假设 $\overset{*}{R}_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}$，故

$$0=\psi_{\mu\nu}=\nabla_\mu\psi_\nu-\psi_\mu\psi_\nu$$
$$\therefore\quad \nabla_\alpha\psi^\alpha=\psi_\alpha\psi^\alpha=\|\psi_\alpha\|^2.$$

可见，通过积分得 $\psi_\alpha=0$，故 ϕ 为仿射变换。

21. 设 ξ^λ 为射影开玲向量，则

$$\mathcal{L}_X\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}=\nabla_\mu\nabla_\nu\xi^\lambda+R_{\alpha\mu\nu}{}^\lambda\xi^\alpha=\psi_\mu\delta_\nu{}^\lambda+\psi_\nu\delta_\mu{}^\lambda.$$

由此可得

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha\xi^\lambda+R_\alpha{}^\lambda\xi^\alpha=2\psi^\lambda,\qquad \nabla_\mu\nabla_\alpha\xi^\alpha=(n+1)\psi_\mu$$

故

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha\xi^\lambda+R_\alpha{}^\lambda\xi^\alpha=\frac{2}{n+1}\nabla^\lambda\nabla_\alpha\xi^\alpha$$

成立。

仿第 13 题，代入积分公式并运用

$$\xi^\lambda\nabla_\lambda\nabla_\alpha\xi^\alpha=\nabla_\lambda(\xi^\lambda\nabla_\alpha\xi^\alpha)-(\nabla_\lambda\xi^\lambda)^2$$

可得下式

$$\int_M\left\{-2\mathrm{Ric}(X,X)+\frac{1}{2}\|\nabla_\lambda\xi_\mu-\nabla_\mu\xi_\lambda\|^2\right.$$

$$\left.+\frac{n-1}{n+1}(\mathrm{div}\,X)^2\right\}d\sigma=0$$

因 Ric(X,X) 是负定的，可见 $X=0$。

22. 设ϕ：$M^n \to M^n$ 为相似变换，则诱导度量 $\overset{*}{g}$ 有如下关系

$$\overset{*}{g} = \Phi(g) = e^{2k} g, \quad k = \text{常数}$$

故$\sqrt{\overset{*}{g}} = e^{nk}\sqrt{g}$。设关于 $\overset{*}{g}$ 的体积素为 $d\sigma^*$，则

$$\int_M d\sigma^* = \int_M \sqrt{\overset{*}{g}}\, dx^1 \cdots dx^n = e^{nk} \int_M \sqrt{g}\, dx^1 \cdots dx^n$$

$$= e^{nk} \int_M d\sigma.$$

另一方面，设ϕ为 $\{x^\lambda\} \to \{\overline{x}^\lambda\}$，则

$$\int_M d\sigma^* = \int_M \sqrt{\overset{*}{g}(p)}\, dx^1 \cdots dx^n$$

$$= \int_M \sqrt{g(\overline{p})}\, d\overline{x}^1 \cdots d\overline{x}^n \quad (\text{§26 引理 } 4,5)$$

$$= \int_M \sqrt{g}\, dx^1 \cdots dx^n = \int_M d\sigma$$

故 $e^{nk}=1$ 即 $k=0$。

23. 设 ϕ：$\{M^n, g\} \to \{\overline{M}^n, \overline{g}\}$是共形映射．假设 M^n 可定向并不失其普遍性（参照下述注意）．

设 $\overset{*}{g} = \Phi(\overline{g}) = e^{2\rho} g$，则由（17.7）知

$$\rho_\alpha{}^\alpha = \nabla_\alpha \rho^\alpha + \frac{n-2}{2} \rho_\alpha \rho^\alpha = \frac{1}{2(n-1)} \left(R - e^{2\rho} \overset{*}{R} \right)$$

故得

$$2(n-1)\Delta\rho = -e^{2\rho}\overset{*}{R} + R - (n-1)(n-2)\|\nabla\rho\|^2 \qquad (1)$$

根据关于 R，$\overset{*}{R}$ 的假设得$\Delta\rho \leqslant 0$，故 $\rho=$常数．从而 $\Delta\rho=0$，$\nabla\rho=0$．再由(1)得

$$0 \leqslant e^{2\rho}\overset{*}{R} = R \leqslant 0$$

故 $\overset{*}{R} = R = 0$ 恒成立。

注意 假设有共形映射 ϕ．因为 ϕ 是微分同胚映射，故若 M^n 不可定向，则$\overline{M}^n$ 也不可定向．这时，在M^n，$\overline{M}^n$ 的二重复盖流形M'，

$\overline{M}'$ 间存在微分同胚映射 ϕ' 使得

$$\bar{\pi}\circ\phi'=\phi\circ\pi \qquad (2)$$

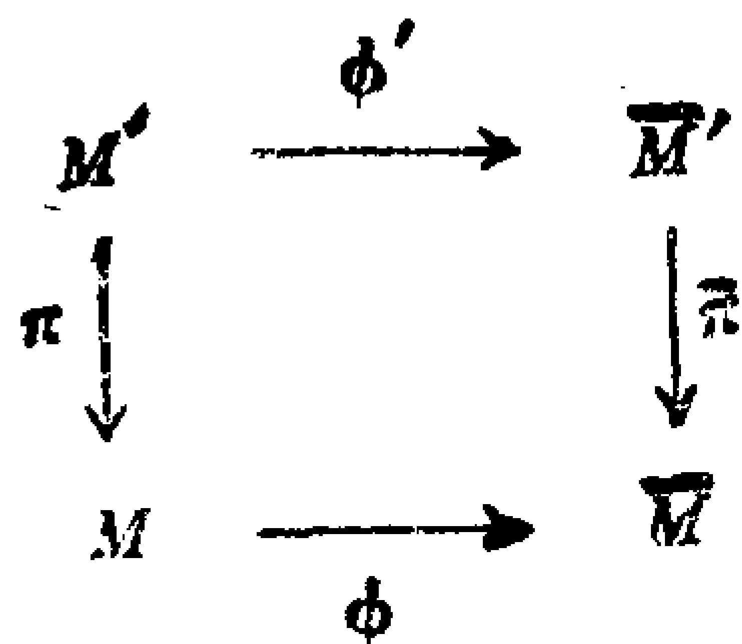


图 15

（证明略）．

设 $g'=\Pi(g)$，$\bar{g}'=\bar{\Pi}(\bar{g})$ 为根据 π，$\bar{\pi}$ 诱导在 M'，$\overline{M}'$ 上的度量，则由(2)知

$$\Phi'(\bar{g}')=\Phi'\circ\bar{\Pi}(\bar{g})=\Pi\circ\Phi(\bar{g})=\Pi(\overset{*}{g})$$
$$=\Pi(e^{2\rho}g)=e^{2\rho}\Pi(g)=e^{2\rho}g'$$

成立，故 ϕ' 也是共形映射．因此不可定向情况下的共形映射问题可归结为定向的情况．

24. 在前题证明的(1)式里，$R=0$，$\overset{*}{R}(p)=R(\bar{p})=0$，故 $\Delta\rho\leqslant 0$。因此 $\rho=$常数，于是讨论中的变换是相似变换．再由第 22 题知，是等距变换．（第 28 题的特例）．

25. 若 ϕ 是相似变换，$\rho=k$，这时显然．以下证明其逆．设关于共形映射 ϕ，$\overset{*}{R}=e^{-2k}R$ 成立．这时根据第 23 题之(1)得

$$2(n-1)\Delta\rho+(n-1)(n-2)\|\nabla\rho\|^2=(1-e^{2(\rho-k)})R. \qquad (1)$$

(1)的两边乘 $1-e^{2n(\rho-k)}$ 并积分之．首先是右边为

$$L=((1-e^{2(\rho-k)})R,\ 1-e^{2n(\rho-k)})\leqslant 0.$$

这是因为 $1-e^{2(\rho-k)}$ 与 $1-e^{2n(\rho-k)}$ 同符号，而且 $R\leqslant 0$。

再来计算左边．由第 2 题知

$$(\Delta\rho,1-e^{2n(\rho-k)})=-(\nabla\rho,\nabla(1-e^{2n(\rho-k)}))$$
$$=2n(\nabla\rho,e^{2n(\rho-k)}\nabla\rho)$$
$$=2n\int_M e^{2n(\rho-k)}\|\nabla\rho\|^2d\sigma$$

成立，故

$$M=(2(n-1)\Delta\rho+(n-1)(n-2)\|\nabla\rho\|^2,\ 1-e^{2n(\rho-k)})$$
$$=(n-1)(3n+2)\int_M e^{2n(\rho-k)}\|\nabla\rho\|^2d\sigma$$
$$+(n-1)(n-2)\int_M\|\nabla\rho\|^2d\sigma\geqslant 0.$$

因$L=M$，故 $L=M=0$。特别是从 $L=0$ 得

$$(1-e^{2(\rho-k)})(1-e^{2n(\rho-k)})R\equiv 0.$$

从 $M=0$ 得 $\rho=$常数，故由上式得 $\rho=k$。可见ϕ为相似映射。

26. 根据前题。

27. 当 $R=\overset{*}{R}=0$ 时，根据 23 题解答(1)。再由 23 题知也不能 $R<0$，$\overset{*}{R}=0$ 或 $R=0$，$\overset{*}{R}<0$。其次设 $R<0$，$\overset{*}{R}<0$，因存在 $R/\overset{*}{R}=e^{2k}$ 的 k，故由 25 题知是相似映射，而且$\overset{*}{g}=e^{2k}g=(R/\overset{*}{R})g$.

28. 当 $R<0$ 时，用 27，22 题。当 $R=0$ 时，用 24 题。

29. $\dfrac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla_\alpha(R_{\lambda\mu\nu\omega}R^{\lambda\mu\nu\omega})=R^{\lambda\mu\nu\omega}\nabla^\alpha\nabla_\alpha R_{\lambda\mu\nu\omega}+\|\nabla_\alpha R_{\lambda\mu\nu\omega}\|^2$ 的右边第一项加以变形。

$$\begin{aligned}R^{\lambda\mu\nu\omega}\nabla^\alpha\nabla_\alpha R_{\lambda\mu\nu\omega}&=R^{\lambda\mu\nu\omega}\nabla^\alpha(-\nabla_\lambda R_{\mu\alpha\nu\omega}-\nabla_\mu R_{\alpha\lambda\nu\omega})\\&=R^{\lambda\mu\nu\omega}\nabla^\alpha(\nabla_\lambda R_{\alpha\mu\nu\omega}-\nabla_\mu R_{\alpha\lambda\nu\omega})\\&=2R^{\lambda\mu\nu\omega}\nabla_\alpha\nabla_\lambda R^\alpha{}_{\mu\nu\omega}.\end{aligned}$$

如果在此处运用利齐恒等式，则

$$\begin{aligned}=2R^{\lambda\mu\nu\omega}(&\nabla_\lambda\nabla_\alpha R^\alpha{}_{\mu\nu\omega}+R_{\alpha\lambda\varepsilon}{}^\alpha R^\varepsilon{}_{\mu\nu\omega}\\&-R_{\alpha\lambda\mu}{}^\varepsilon R^\alpha{}_{\varepsilon\nu\omega}-R_{\alpha\lambda\nu}{}^\varepsilon R^\alpha{}_{\mu\varepsilon\omega}-R_{\alpha\lambda\omega}{}^\varepsilon R^\alpha{}_{\mu\nu\varepsilon})\end{aligned}$$

令其中各项为$a_1,\cdots,a_5$，则

$$\begin{aligned}a_1&=2\nabla_\lambda(R^{\lambda\mu\nu\omega}\nabla_\alpha R^\alpha{}_{\mu\nu\omega})-2\|\nabla_\lambda R^{\lambda\mu\nu\omega}\|^2,\\a_2&=2R^{\lambda\mu\nu\omega}R_{\lambda\varepsilon}R^\varepsilon{}_{\mu\nu\omega},\\a_3&=-R^{\lambda\mu\nu\omega}(R_{\alpha\lambda\mu}{}^\varepsilon-R_{\alpha\mu\lambda}{}^\varepsilon)R^\alpha{}_{\varepsilon\nu\omega}\\&=-R^{\lambda\mu\nu\omega}R_{\mu\lambda\alpha}{}^\varepsilon R^\alpha{}_{\varepsilon\nu\omega}=R^{\lambda\mu\nu\omega}R_{\lambda\mu\alpha\varepsilon}R^{\alpha\varepsilon}{}_{\nu\omega},\\a_4+a_5&=2R^{\lambda\mu\nu\omega}(-R_{\alpha\lambda\nu}{}^\varepsilon R^\alpha{}_{\mu\varepsilon\omega}-R_{\alpha\lambda\omega}{}^\varepsilon R^\alpha{}_{\mu\nu\varepsilon})\\&=2R^{\lambda\mu\nu\omega}(R_{\lambda\alpha\nu}{}^\varepsilon R^\alpha{}_{\mu\varepsilon\omega}-R_{\lambda\alpha\omega}{}^\varepsilon R^\alpha{}_{\mu\varepsilon\nu})\\&=4R^{\lambda\mu\nu\omega}R_{\lambda\alpha\nu\varepsilon}R^\alpha{}_\mu{}^\varepsilon{}_\omega.\end{aligned}$$

代入这些式子并积分之。

30. 根据(13.9)知

$$\nabla_\alpha R_{\lambda\mu\nu}{}^\alpha=\nabla_\lambda R_{\mu\nu}-\nabla_\mu R_{\lambda\nu}$$

成立。故在(i)，(ii)的情况下，$\nabla_\alpha R_{\lambda\mu\nu}{}^\alpha=0$。其次设为共形平坦的，则

$$C_{\lambda\mu\nu}=\nabla_\lambda R_{\mu\nu}-\nabla_\mu R_{\lambda\nu}-\frac{1}{2(n-1)}(g_{\mu\nu}\nabla_\lambda R-g_{\lambda\nu}\nabla_\mu R)=0.$$

然因 $R=$ 常数，故得 $\nabla_\lambda R_{\mu\nu}-\nabla_\mu R_{\lambda\nu}=0$，仍然有 $\nabla_\alpha R_{\lambda\mu\nu}{}^\alpha=0$ 成立。

31. 运用前题。首先证明在任意点 p，$K(p)\geqslant 0$。由习题三第 51 题 (p.59) 知，在点 p 存在满足下列条件的标准正交基 $X_1,\cdots,X_4$。

(i) $\rho(X_\lambda,X_\mu),R_{1234},R_{1342},R_{1423}$以外的曲率张量的分量全是0。

(ii) $|R_{1342}-R_{1234}|\leqslant\rho_{12}-\rho_{13}$, $|R_{1342}-R_{1423}|\leqslant\rho_{13}-\rho_{14}$,

$|R_{1423}-R_{1234}|\leqslant\rho_{12}-\rho_{14}$.

用关于这种基底的分量计算 $K(p)$。因 $g(X_\lambda,X_\mu)=\delta_{\lambda\mu}$，故 $K(p)$有以下形状。

$$K(p)=\sum\Big\{R_{\alpha\beta}R_{\alpha\lambda\mu\nu}R_{\beta\lambda\mu\nu}+\frac{1}{2}R_{\lambda\mu\rho\sigma}R_{\lambda\mu\alpha\beta}R_{\alpha\beta\rho\sigma}$$
$$+2R_{\lambda\alpha\mu\beta}R_{\lambda\rho\mu\sigma}R_{\rho\alpha\sigma\beta}\Big\}$$

为了简单，记

$$a=\rho_{12}=\rho_{34},\quad b=\rho_{13}=\rho_{24},\quad c=\rho_{14}=\rho_{23},$$
$$\alpha=R_{1234},\quad \beta=R_{1342},\quad \gamma=R_{1423}$$

(参照 § 14 例题 2 p.45)。又从基底的作法可见

$$a\geqslant b\geqslant c$$

人们知道，通过复杂的计算，$K(p)$ 可由下式表示。

$$K(p)/8=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2$$
$$+\alpha^2(b+c-2a)+\beta^2(c+a-2b)$$
$$+\gamma^2(a+b-2c)-6a\beta\gamma-6b\gamma\alpha-6c\alpha\beta$$

然由假设知

$$a,b,c>\frac{1}{4}>0$$

$$a-b\geqslant|\alpha-\beta|,\quad b-c\geqslant|\beta-\gamma|,\quad a-c\geqslant|\alpha-\gamma|$$

故

$$K(p)/8 \geqslant a(\beta-\gamma)^2 + b(\alpha-\gamma)^2 + c(\alpha-\beta)^2$$
$$+\alpha^2(b+c-2a) + \beta^2(c+a-2b) + \gamma^2(a+b-2c)$$
$$-6a\beta\gamma - 6b\gamma\alpha - 6c\alpha\beta.$$

整理之得

$$K(p)/16 \geqslant \alpha^2(b+c-a) + \beta^2(c+a-b)$$
$$+\gamma^2(a+b-c) - 4a\beta\gamma - 4b\gamma\alpha - 4c\alpha\beta.$$

因 $\alpha+\beta+\gamma=0$，故将 $\alpha=-(\beta+\gamma)$ 代入之，则

$$K(p)/96 \geqslant c\beta^2 + b\gamma^2 + (b+c-a)\beta\gamma.$$

右边可看做 β,γ 的二次式，故其判别式 Δ 为

$$\Delta = (b+c-a)^2 - 4bc$$
$$= (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\{\sqrt{a}-(\sqrt{b}+\sqrt{c})\}$$
$$\times\{a-(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\}$$

然而

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}>0$$

又因

$$0 \leqslant \sqrt{b}-\sqrt{c} < \sqrt{b}$$

故得

$$a-(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 > a-(\sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

再由

$$\sqrt{a} \leqslant 1, \quad \sqrt{b}+\sqrt{c} > \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

得

$$\sqrt{a}-(\sqrt{b}+\sqrt{c})<0.$$

因为已证明了 $\Delta<0$，故 $K(p)/96 \geqslant 0$。因此，根据前题在所有的点 p，$K(p)=0$。然而，只在 $\beta=\gamma=0=\alpha$ 时，$K(p)=0$ 才成立，故由(1)得 $a=b=c$，从而讨论中的空间是常曲率空间。

注意 下限不能比 1/4 再低。原因是，存在满足 $1/4 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$ 的非常曲率空间的四维爱因斯坦空间。

32. $(i(X)u,v)$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\int_M \xi^{\lambda_1}u_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}v^{\lambda_2\cdots\lambda_r}d\sigma$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\int_M u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}(\xi^{\lambda_1}v^{\lambda_2\cdots\lambda_r})d\sigma$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\int_M u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}\frac{1}{r}(\xi^{\lambda_1}v^{\lambda_2\cdots\lambda_r}-\xi^{\lambda_2}v^{\lambda_1\lambda_3\cdots\lambda_r}+\cdots$$

$$+(-1)^{i-1}\xi^{\lambda_i}v^{\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_r}+\cdots+(-1)^{r-1}\xi^{\lambda_r}v^{\lambda_1\cdots\lambda_{r-1}})d\sigma$$

$$=\frac{1}{r!}\int_M u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\xi^{\lambda_i}v^{\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_r}d\sigma=(u,e(X)v)$$

33. $\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}\nabla_{\lambda_i}u_{\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_{r+1}}$

$$=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}\left(\frac{\partial u_{\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_{r+1}}}{\partial x^{\lambda_i}}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\left\{{\alpha \atop \lambda_i\lambda_j}\right\}u_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_{r+1}}\right)$$

因此要证明

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1}\left\{{\alpha \atop \lambda_i\lambda_j}\right\}u_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_{r+1}}=0$$

为此，只要证出对于各 i，$j(\neq)$

$$(-1)^{i-1}\left\{{\alpha \atop \lambda_i\lambda_j}\right\}u_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_{r+1}}$$

$$+(-1)^{j-1}\left\{{\alpha \atop \lambda_j\lambda_i}\right\}u_{\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_j\cdots\alpha\cdots\lambda_{r+1}}=0$$

即可。然因左边是

$$\left\{{\alpha \atop \lambda_i\lambda_j}\right\}((-1)^{i-1}u_{\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}\alpha\lambda_{j+1}\cdots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\cdots\lambda_{r+1}}$$

$$+(-1)^{j-1}u_{\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}\lambda_{j+1}\cdots\lambda_{i-1}\alpha\lambda_{i+1}\cdots\lambda_{r+1}})$$

由于 u 的反称性，可见为 0。

34. 令 $i(X)u=v$，则

$$v_{\lambda_2\cdots\lambda_r}=\xi^\alpha u_{\alpha\lambda_2\cdots\lambda_r}$$

$di(X)u=dv$ 的分量为

$$(dv)_{\lambda_1\cdots\lambda_r}=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\frac{\partial v_{\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_r}}{\partial x^{\lambda_i}}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\left(\frac{\partial u_{\alpha\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_r}}{\partial x^{\lambda_i}}\xi^\alpha\right.$$

$$\left.+u_{\alpha\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_r}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^{\lambda_i}}\right)\qquad(1)$$

$i(X)du$ 的分量为

$$(i(X)du)_{\lambda_1\cdots\lambda_r}=\xi^\alpha\left(\frac{\partial u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}}{\partial x^\alpha}-\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial u_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_r}}{\partial x^{\lambda_i}}\right)\qquad(2)$$

(1)+(2)，注意(1)的右边第一项与(2)的右边第二项相消，则

$$((di(X)+i(X)d)u)_{\lambda_1\cdots\lambda_r}$$

$$=\xi^\alpha\frac{\partial u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}}{\partial x^\alpha}+\sum(-1)^{i-1}u_{\alpha\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_r}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^{\lambda_i}}$$

$$=\xi^\alpha\frac{\partial u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}}{\partial x^\alpha}+\sum u_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_r}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^{\lambda_i}}=\mathscr{L}_\xi u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}$$

$$=(\theta(X)u)_{\lambda_1\cdots\lambda_r}.$$

35. 令 $du=v$，则 $ddu=dv$ 的分量是

$$(dv)_{\lambda_1\cdots\lambda_{r+2}}=\sum_j(-1)^{j+1}\frac{\partial v_{\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_j\cdots\lambda_{r+2}}}{\partial x^{\lambda_j}}$$

$$=\sum_j(-1)^{j+1}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda_j}}\left\{\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i-1}\right.$$

$$\times\frac{\partial u_{\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\hat{\lambda}_j\cdots\lambda_{r+2}}}{\partial x^{\lambda_i}}$$

$$+\sum_{i=j+1}^{r+2}(-1)^{i-2}\frac{\partial u_{\lambda_1\cdots\hat{\lambda}_j\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_{r+2}}}{\partial x^{\lambda_i}}$$

$$= \sum_{j} \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^2 u_{\lambda_1 \cdots \hat{\lambda}_i \cdots \hat{\lambda}_j \cdots \lambda_{r+2}}}{\partial x^{\lambda_j} \partial x^{\lambda_i}}$$

$$+ \sum_{j} \sum_{i=j+1}^{r+2} (-1)^{i+j-1} \frac{\partial^2 u_{\lambda_1 \cdots \hat{\lambda}_j \cdots \hat{\lambda}_i \cdots \lambda_{r+2}}}{\partial x^{\lambda_j} \partial x^{\lambda_i}}$$

交换第二项的字母 i，j 得

$$\sum_{i=1}^{r+2} \sum_{j=i+1}^{r+2} (-1)^{i+j-1} \frac{\partial^2 u_{\lambda_1 \cdots \hat{\lambda}_i \cdots \hat{\lambda}_j \cdots \lambda_{r+2}}}{\partial x^{\lambda_i} \partial x^{\lambda_j}}$$

故 $dv = 0$。

36. $(\delta\delta u)_{\lambda_3 \dots \lambda_r} = \nabla^\beta(\nabla^\alpha u_{\alpha\beta\lambda_3 \dots \lambda_r}) = \frac{1}{2}(\nabla_\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\beta) u^{\alpha\beta}{}_{\lambda_3 \dots \lambda_r}$

使用利齐恒等式得

$$2(\delta\delta u)_{\lambda_3 \dots \lambda_r} = R_{\beta\alpha\varepsilon}{}^{\alpha} u^{\varepsilon\beta}{}_{\lambda_3 \dots \lambda_r} + R_{\beta\alpha\varepsilon}{}^{\beta} u^{\alpha\varepsilon}{}_{\lambda_3 \dots \lambda_r}$$

$$- \sum_{i=3}^{r} R_{\beta\alpha\lambda_i}{}^{\varepsilon} u^{\alpha\beta}{}_{\lambda_3 \dots \varepsilon \dots \lambda_r}$$

然而对于反称张量

$$R_{\lambda\mu} u^{\lambda\mu\cdots} = 0,$$

$$R_{\alpha\beta\lambda\gamma} u^{\alpha\beta\gamma\cdots} = 0 \text{（参照习题一第 22 题）}$$

故 $\delta\delta u = 0$。

37. 令 $\xi^\mu = u_{\lambda_1 \dots \lambda_r} v^{\mu\lambda_1 \cdots \lambda_r}$，则

$$\nabla_\mu \xi^\mu = (\nabla_\mu u_{\lambda_1 \dots \lambda_r}) v^{\mu\lambda_1 \cdots \lambda_r} + u_{\lambda_1 \dots \lambda_r} \nabla_\mu v^{\mu\lambda_1 \cdots \lambda_r}$$

$$= \frac{1}{r+1} (\nabla_\mu u_{\lambda_1 \dots \lambda_r} - \nabla_{\lambda_1} u_{\mu\lambda_2 \dots \lambda_r} - \cdots$$

$$- \nabla_{\lambda_r} u_{\lambda_1 \dots \lambda_{r-1}\mu}) v^{\mu\lambda_1 \cdots \lambda_r} + u_{\lambda_1 \dots \lambda_r} \nabla_\mu v^{\mu\lambda_1 \cdots \lambda_r}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r!} \nabla_\mu \xi^\mu = \frac{1}{(r+1)!} (du)_{\mu\lambda_1 \dots \lambda_r} v^{\mu\lambda_1 \cdots \lambda_r}$$

$$+ \frac{1}{r!} u_{\lambda_1 \dots \lambda_r} (\delta v)^{\lambda_1 \cdots \lambda_r}.$$

积分之得 $0 = (du, v) + (u, \delta v)$。

38. (i),(ii)从d，$-\delta$ 的对偶性可得。从

$$(\Delta w, w) = ((d\delta + \delta d)w, w) = (d\delta w, w) + (\delta dw, w)$$
$$= -(\delta w, \delta w) - (dw, dw)$$

得(iii)。

39. 与前题一样

$$(\Delta u, v) = -(du, dv) - (\delta u, \delta v)$$
$$= (u, \delta dv) + (u, d\delta v) = (u, \Delta v).$$

40. 对于任意张量 $A_{\lambda\mu}$,

$$(\nabla_\lambda \nabla_\mu \phi + k\phi g_{\lambda\mu})A^{\lambda\mu}$$
$$= \nabla_\lambda(\nabla_\mu \phi A^{\lambda\mu}) - \nabla_\mu \phi \nabla_\lambda A^{\lambda\mu} + k\phi A_\lambda{}^\lambda$$
$$= \nabla_\lambda(\nabla_\mu \phi A^{\lambda\mu}) - \nabla_\mu(\phi \nabla_\lambda A^{\lambda\mu}) + \phi \nabla_\mu \nabla_\lambda A^{\lambda\mu} + k\phi A_\lambda{}^\lambda.$$

故

$$\int_M (\nabla_\lambda \nabla_\mu \phi + k\phi g_{\lambda\mu})A^{\lambda\mu} d\sigma = \int_M (\nabla_\mu \nabla_\lambda A^{\lambda\mu} + kA_\lambda{}^\lambda)\phi d\sigma \qquad (1)$$

成立。现在令

$$A_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda \nabla_\mu \phi + k\phi g_{\lambda\mu},$$

并代入上式，因为

$$A_\lambda{}^\lambda = \nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi + nk\phi = \Delta\phi + nk\phi.$$
$$\nabla_\mu \nabla_\lambda A^{\lambda\mu} = \nabla_\mu \nabla_\lambda(\nabla^\lambda \nabla^\mu \phi + k\phi g^{\lambda\mu})$$
$$= \nabla^\mu \nabla_\lambda \nabla_\mu \nabla^\lambda \phi + k\nabla^\lambda \nabla_\lambda \phi$$
$$= \nabla^\mu(\nabla_\mu \nabla_\lambda \nabla^\lambda \phi + R_{\lambda\mu\varepsilon}{}^\lambda \nabla^\varepsilon \phi) + k\Delta\phi$$
$$= \Delta\Delta\phi + \nabla^\mu(R_{\mu\varepsilon}\nabla^\varepsilon \phi) + k\Delta\phi.$$

又因为是爱因斯坦空间，所以

$$R_{\mu\alpha} = \frac{R}{n} g_{\mu\alpha} = (n-1)kg_{\mu\alpha}.$$

故 $\nabla_\mu \nabla_\lambda A^{\lambda\mu} = \Delta\Delta\phi + nk\Delta\phi$。将这些式子代入(1)中得

$$\int_M \|\nabla_\lambda \nabla_\mu \phi + k\phi g_{\lambda\mu}\|^2 d\sigma = (\Delta\Delta\phi + nk\Delta\phi + k(\Delta\phi + nk\phi), \phi)$$
$$= (\Delta(\Delta\phi + nk\phi), \phi) + k(\Delta\phi + nk\phi, \phi)$$
$$= (\Delta\phi + nk\phi, \Delta\phi) + (\Delta\phi + nk\phi, k\phi)$$
$$= (\Delta\phi + nk\phi, \Delta\phi + k\phi).$$

41. $\Delta f=(d\delta f+\delta df)=\delta df=\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}f.$

$$
\begin{aligned}
(\Delta u)_{\lambda}&=((d\delta+\delta d)u)_{\lambda}=(d\nabla^{\alpha}u_{\alpha})_{\lambda}+\nabla^{\alpha}(du)_{\alpha\lambda}\\
&=\nabla_{\lambda}\nabla^{\alpha}u_{\alpha}+\nabla^{\alpha}(\nabla_{\alpha}u_{\lambda}-\nabla_{\lambda}u_{\alpha})=\nabla_{\lambda}\nabla_{\alpha}u^{\alpha}+\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}u_{\lambda}-\nabla_{\alpha}\nabla_{\lambda}u^{\alpha}\\
&=\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}u_{\lambda}+(\nabla_{\lambda}\nabla_{\alpha}u^{\alpha}-\nabla_{\alpha}\nabla_{\lambda}u^{\alpha})\\
&=\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}u_{\lambda}+R_{\lambda\alpha\varepsilon}{}^{\alpha}u^{\varepsilon}=\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}u_{\lambda}-R_{\lambda\varepsilon}u^{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

其次计算 $r\geqslant 2$ 的情况。

$$(du)_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_r}=\nabla_{\mu}u_{\lambda_1\ldots\lambda_r}-\sum\nabla_{\lambda_i}u_{\lambda_1\ldots\mu\ldots\lambda_r}.$$

$$(\delta du)_{\lambda_1\ldots\lambda_r}=\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}u_{\lambda_1\ldots\lambda_r}-\sum\nabla_{\mu}\nabla_{\lambda_i}u_{\lambda_1\ldots}{}^{\mu}{}_{\ldots\lambda_r}.$$

$$(\delta u)_{\lambda_2\ldots\lambda_r}=\nabla^{\mu}u_{\mu\lambda_2\ldots\lambda_r}.$$

$$
\begin{aligned}
(d\delta u)_{\lambda_1\ldots\lambda_r}&=\nabla_{\lambda_1}(\nabla^{\mu}u_{\mu\lambda_2\ldots\lambda_r})-\sum_{j=2}^{r}\nabla_{\lambda_j}(\nabla^{\mu}u_{\mu\lambda_2\ldots\lambda_1\ldots\lambda_r})\\
&=\nabla_{\lambda_1}\nabla_{\mu}u^{\mu}{}_{\lambda_2\ldots\lambda_r}+\sum_{j=2}^{r}\nabla_{\lambda_j}\nabla_{\mu}u_{\lambda_1\lambda_2\ldots}{}^{\mu}{}_{\ldots\lambda_r}.
\end{aligned}
$$

由此得

$$(\Delta u)_{\lambda_1\ldots\lambda_r}=\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}u_{\lambda_1\ldots\lambda_r}+\sum_{j=1}^{r}(\nabla_{\lambda_j}\nabla_{\mu}-\nabla_{\mu}\nabla_{\lambda_j})u_{\lambda_1\ldots}{}^{\mu}{}_{\ldots\lambda_r}$$

将利齐公式适用于最后项，其中运用以下变形。

$$
\begin{aligned}
R_{\lambda_j\beta\lambda_i\alpha}u_{\lambda_1\ldots}{}^{\alpha}{}_{\ldots}{}^{\beta}{}_{\ldots\lambda_r}&=\frac{1}{2}(R_{\lambda_j\beta\lambda_i\alpha}-R_{\lambda_j\alpha\lambda_i\beta})u_{\lambda_1\ldots}{}^{\alpha}{}_{\ldots}{}^{\beta}{}_{\ldots\lambda_r}\\
&=\frac{1}{2}R_{\lambda_j\lambda_i\beta\alpha}u_{\lambda_1\ldots}{}^{\alpha}{}_{\ldots}{}^{\beta}{}_{\ldots\lambda_r}
\end{aligned}
$$

42. $dw=\delta w=0\Rightarrow\Delta w=0$ 显然。其逆根据第 38 题 (iii)。

43. 设 $w=du$，则 $0=\delta w$。故由

$$(w,w)=(du,w)=-(u,\delta w)=0$$

得 $w=0$。又设 $w=\delta v$，则 $0=dw$，故

$$(w,w)=(\delta v,w)=-(v,dw)=0.$$

44. 设 $u\in A_r(M)$，将 Δ 运算在

$$f=\|u\|^2=u_{\lambda_1\ldots\lambda_r}u^{\lambda_1\ldots\lambda_r}$$

上，则得

$$(1/2)\Delta f=\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}u_{\lambda\ \ldots\lambda_r}u^{\lambda_1\cdots\lambda_r}+\|\nabla u\|^2.$$

将第 41 题的结果

$$\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}u_{\lambda_1\ldots\lambda_r}=(\Delta u)_{\lambda_1\ldots\lambda_r}+\sum R_{\lambda_i}{}^{a}u_{\lambda_1\ldots a\ldots\lambda_r}$$

$$+\sum_{i<j}R_{\lambda_i\lambda_j}{}^{a\beta}u_{\lambda_1\ldots a\ldots\beta\ldots\lambda_r}$$

代入右边第一项并整理之可得

$$\frac{1}{2}\Delta f=rR_{a\beta}u^{a}{}_{\lambda\ \ldots\lambda_r}u^{\beta\lambda_2\cdots\lambda_r}$$

$$+\frac{r(r-1)}{2}R_{\rho\sigma a\beta}u^{\rho\sigma\lambda_3\cdots\lambda_r}u^{a\beta}{}_{\lambda_3\ldots\lambda_r}+\langle\Delta u,u\rangle+\|\nabla u\|^2$$

再积分之。

45. 在已知条件下证明 $F_r(u)\in A_r(M)$ 又是正定的。因为是共形平坦的，所以

$$(n-2)R_{\rho\sigma a\beta}=-R_{\rho a}g_{\sigma\beta}+R_{\sigma a}g_{\rho\beta}-g_{\rho a}R_{\sigma\beta}+g_{\sigma a}R_{\rho\beta}$$

$$+\frac{R}{n-1}(g_{\rho a}g_{\sigma\beta}-g_{\sigma a}g_{\rho\beta}).$$

故得

$$(n-2)R_{\rho\sigma a\beta}u^{\rho\sigma\lambda_3\cdots\lambda_r}u^{a\beta}{}_{\lambda_3\ldots\lambda_r}$$

$$=-4R_{a\beta}u^{a\lambda_2\cdots\lambda_r}u^{\beta}{}_{\lambda_2\ldots\lambda_r}+\frac{2R}{n-1}u^{\lambda_1\cdots\lambda_r}u_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$$

于是

$$F_r(u)=\frac{n-2r}{n-2}R_{a\beta}u^{a\lambda_2\cdots\lambda_r}u^{\beta}{}_{\lambda_2\ldots\lambda_r}+\frac{(r-1)R}{(n-1)(n-2)}\|u\|^2$$

因为根据假设知利齐形式是正定的，所以对于固定的 $\lambda_2,\cdots\lambda_r$

$$R_{a\beta}u^{a\lambda_2\cdots\lambda_r}u^{\beta}{}_{\lambda_2\ldots\lambda_r}\geqslant 0$$

只有当 $u^{a\lambda_2\cdots\lambda_r}=0$ 时等号成立。又由习题三第 28 题得 $R>0$。故如 $n/2>r$，则得 $F_r(u)\geqslant 0$，只有 $u=0$ 时等号成立。因此对于 $r=1,\cdots,[n/2]$，$b_r(M)=0$ 成立（$r=1$ 的情况根据第 18 题）。再由庞加

莱对偶定理（下述）知，对于 $r=[n/2]+1, \cdots, n-1$，也是 $b_r(M)=0$。

注意　庞加莱对偶定理 对于紧致可定向的拓扑流形

$$b_r(M)=b_{n-r}(M), \quad r=0,1,\cdots,n$$

成立。

46. 我们来证明在各点 p，$F_2(u)$ 是正定的。根据矩阵理论知，可选择 $T_p(M)$ 的标准正交基底

$$X_1,\ldots,X_m, \quad X_{1^*},\ldots,X_{m^*}, \quad X_{m^*+\varepsilon}$$
$$(i=1,\cdots,m; \ i^*=m+i)$$

使得反称张量 $u_{\lambda\mu}$ 除

$$u_{ii^*}=-u_{i^*i}(=u_i)>0, \quad i=1,\cdots,m; \ i^*=m+i$$

以外的分量为0。其中设 ε 为0或1，只有当 n 为奇数时 $X_{m^*+\varepsilon}$ 出现，$X_{m^*+1}=X_n$。对于这样基底计算

$$F_2(u)=\sum R_{\alpha\beta}u_{\alpha\mu}u_{\beta\mu}+\frac{1}{2}\sum R_{\alpha\beta\rho\sigma}u_{\alpha\beta}u_{\rho\sigma}$$

首先

$$\begin{aligned}
\sum R_{\alpha\beta}u_{\alpha\mu}u_{\beta\mu}&=\sum R_{\lambda\alpha\beta\lambda}u_{\alpha\mu}u_{\beta\mu}\\
&=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(R_{\lambda ii\lambda}u_{ii^*}u_{ii^*}+R_{\lambda i^*i^*\lambda}u_{i^*i}u_{i^*i})\\
&=\sum_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq i}}^{n}\sum_{i=1}^{m}\rho(i,\lambda)u_i^2+\sum_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq i^*}}^{n}\sum_{i=1}^{m}\rho(i^*,\lambda)u_i^2\\
&=\sum_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq i,i^*}}^{n}\sum_{i=1}^{m}\{\rho(i,\lambda)+\rho(i^*,\lambda)\}u_i^2+2\sum_{i=1}^{m}\rho(i,i^*)u_i^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum R_{\alpha\beta\rho\sigma}u_{\alpha\beta}u_{\rho\sigma}&=2\sum_{i,j=1}^{m}R_{ii^*jj^*}u_iu_j\\
&=4\sum_{i<j}R_{ii^*jj^*}u_iu_j-2\sum_{i=1}^{m}\rho(i,i^*)u_i^2
\end{aligned}$$

式中设

$$\sum_{i<j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m}$$

由此可得

$$F_2(u) = \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq i, i^*}}^{n} \sum_{i=1}^{m} \{\rho(i,\lambda) + \rho(i^*,\lambda)\} u_i^2 + 4\sum_{i<j} R_{ii^*jj^*} u_i u_j$$

又因为是 δ 夹紧，故由 § 14 例题 3(*p*. 46)知

$$a\delta \leqslant \rho(i,\lambda) \leqslant a, \qquad a\delta \leqslant \rho(i^*,\lambda) \leqslant a$$

$$|R_{ii^*jj^*}| \leqslant \frac{2a}{3}(1-\delta), \qquad 0<\delta<1, \qquad 0<a,$$

故

$$F_2(u) \geqslant a\left\{2(n-2)\delta \sum_{i=1}^{m} u_i^2 - \frac{8}{3}(1-\delta)\sum_{i<j} u_i u_j\right\}$$

然因

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i<j}(u_i^2 + u_j^2)$$

故

$$F_2(u) \geqslant a\left\{\frac{2(n-2)\delta}{m-1}\sum_{i<j}(u_i^2+u_j^2) - \frac{8}{3}(1-\delta)\sum_{i<j} u_i u_j\right\}$$

$$= \frac{2(n-2)a\delta}{m-1}\sum_{i<j}\left\{(u_i-u_j)^2 + \frac{2\{(8m+3\varepsilon-8)\delta-2(m-1)\}}{3(n-2)\delta} u_i u_j\right\}$$

因此，如果

$$\delta > \frac{2(m-1)}{8m+3\varepsilon-8} \tag{1}$$

那么 $F_2(u)$是正定的，从而必须 $u_1=\cdots=u_m=0$。(1)式

当 $\varepsilon=0$ 时 $\quad \delta > \dfrac{2(m-1)}{8m-8}=\dfrac{1}{4}$

当 $\varepsilon=1$ 时 $\quad \delta > \dfrac{2(m-1)}{8m-5}$

47. 积分下式可得。

$$\begin{aligned}
&(\theta(X)S)_{\mu_1\cdots\mu_s}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}T_{\lambda_1\cdots\lambda_r}{}^{\mu_1\cdots\mu_s}\\
&=(\xi^\alpha\nabla_\alpha S_{\mu_1\cdots\mu_s}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}+\sum S_{\mu_1\cdots\alpha\cdots\mu_s}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}\nabla_{\mu_i}\xi^\alpha\\
&\qquad -\sum S_{\mu_1\cdots\mu_s}{}^{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_r}\nabla_\alpha\xi^{\lambda_i})T_{\lambda_1\cdots\lambda_r}{}^{\mu_1\cdots\mu_s}\\
&=\nabla_\alpha(\xi^\alpha S_{\mu_1\cdots\mu_s}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}T_{\lambda_1\cdots\lambda_r}{}^{\mu_1\cdots\mu_s})\\
&\quad -\nabla_\alpha\xi^\alpha S_{\mu_1\cdots\mu_s}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}T_{\lambda_1\cdots\lambda_r}{}^{\mu_1\cdots\mu_s}-\xi^\alpha S_{\mu_1\cdots\mu_s}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}\nabla_\alpha T_{\lambda_1\cdots\lambda_r}{}^{\mu_1\cdots\mu_s}\\
&\quad +\sum S_{\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_s}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}\nabla_\alpha\xi^{\mu_i}T_{\lambda_1\cdots\lambda_r}{}^{\mu_1\cdots\alpha\cdots\mu_s}\\
&\quad -\sum S_{\mu_1\cdots\mu_s}{}^{\lambda_1\cdots\lambda_i\cdots\lambda_r}\nabla_{\lambda_i}\xi^\alpha T_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_r}{}^{\mu_1\cdots\mu_s}
\end{aligned}$$

48. 将 $v\in T^0_r(M)$看做反变张量时记做 $V\in T^r_0(M)$。根据前题的计算得

$$\begin{aligned}
\langle\theta(X)u,v\rangle&=\langle\theta(X)u,V\rangle \qquad (1)\\
&=\nabla_\alpha(\xi^\alpha u_{\mu_1\cdots\mu_r}V^{\mu_1\cdots\mu_r})-\nabla_\alpha\xi^\alpha u_{\mu_1\cdots\mu_r}V^{\mu_1\cdots\mu_r}\\
&\quad -u_{\mu_1\cdots\mu_r}(\theta(X)V)^{\mu_1\cdots\mu_r}
\end{aligned}$$

然因

$$V^{\mu_1\cdots\mu_r}=g^{\lambda_1\mu_1}\cdots g^{\lambda_r\mu_r}v_{\lambda_1\cdots\lambda_r}$$

故

$$\begin{aligned}
(\theta(X)V)^{\mu_1\cdots\mu_r}&=\sum g^{\lambda_1\mu_1}\cdots(\theta(X)g)^{\lambda_i\mu_i}\cdots g^{\lambda_r\mu_r}v_{\lambda_1\cdots\lambda_r}\\
&\quad +\sum g^{\lambda_1\mu_1}\cdots g^{\lambda_r\mu_r}(\theta(X)v)_{\lambda_1\cdots\lambda_r}\\
&\quad -u_{\mu_1\cdots\mu_r}(\theta(X)V)^{\mu_1\cdots\mu_r}\\
&=-\sum(\theta(X)g)^{\lambda_i\mu_i}u^{\mu_1\cdots}{}_{\lambda_i}{}^{\cdots\mu_r}v_{\mu_1\cdots\mu_r}\\
&\quad -u^{\mu_1\cdots\mu_r}(\theta(X)v)_{\mu_1\cdots\mu_r}
\end{aligned}$$

$$= -\sum(\theta(X)g)^{\lambda_i\alpha}g_{\lambda_i\beta}u^{\mu_1\cdots\beta\cdots\mu_r}v_{\mu_1\cdots\alpha\cdots\mu_r}$$
$$-u^{\mu_1\cdots\mu_r}(\theta(X)v)_{\mu_1\cdots\mu_r}$$
$$=\sum g^{\lambda_i\alpha}(\theta(X)g)_{\lambda_i\beta}u^{\mu_1\cdots\beta\cdots\mu_r}v_{\mu_1\cdots\alpha\cdots\mu_r}$$
$$-u^{\mu_1\cdots\mu_r}(\theta(X)v)_{\mu_1\cdots\mu_r}$$

代入(1)得

$$\langle\theta(X)u,v\rangle=\nabla_\alpha(\xi^\alpha u_{\mu_1\cdots\mu_r}v^{\mu_1\cdots\mu_r})-\nabla_\alpha\xi^\alpha u^{\mu_1\cdots\mu_r}v_{\mu_1\cdots\mu_r}$$
$$+\sum g^{\varepsilon\alpha}(\theta(X)g)_{\varepsilon\mu_i}u^{\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_r}v_{\mu_1\cdots\alpha\cdots\mu_r}$$
$$-u^{\mu_1\cdots\mu_r}(\theta(X)v)_{\mu_1\cdots\mu_r}$$
$$=\nabla_\alpha(\xi^\alpha u_{\mu_1\cdots\mu_r}v^{\mu_1\cdots\mu_r})+(\bar\theta(X)v)_{\mu_1\cdots\mu_r}u^{\mu_1\cdots\mu_r}.$$

积分之可得$(\theta(X)u,v)=(u,\bar\theta(X)v)$

49. (i) 对于 $u\in A_r(M)$

$$(\delta e(X)u)_{\lambda_1\cdots\lambda_r}=\nabla^\mu(\xi_\mu u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}-\sum\xi_{\lambda_i}u_{\lambda_1\cdots\mu\cdots\lambda_r})$$
$$=(\nabla^\mu\xi_\mu)u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}+\xi^\mu\nabla_\mu u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}$$
$$-\sum\nabla^\mu\xi_{\lambda_i}u_{\lambda_1\cdots\mu\cdots\lambda_r}-\sum_{i=1}^{r}\xi_{\lambda_i}\nabla^\mu u_{\lambda_1\cdots\mu\cdots\lambda_r}$$

此外,

$$(e(X)\delta u)_{\lambda_1\cdots\lambda_r}=\xi_{\lambda_1}(\delta u)_{\lambda_2\cdots\lambda_r}-\sum_{i=2}^{r}\xi_{\lambda_i}(\delta u)_{\lambda_2\cdots\lambda_1\cdots\lambda_r}$$
$$=\xi_{\lambda_1}\nabla^\mu u_{\mu\lambda_2\cdots\lambda_r}-\sum_{i=2}^{r}\xi_{\lambda_i}\nabla^\mu u_{\mu\lambda_2\cdots\lambda_1\cdots\lambda_r}$$

故边边相加得

$$\nabla^\mu\xi_\mu u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}+\xi^\mu\nabla_\mu u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}-\sum\nabla^\mu\xi_{\lambda_i}u_{\lambda_1\cdots\mu\cdots\lambda_r}$$
$$=\nabla^\mu\xi_\mu u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}+\xi^\mu\nabla_\mu u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}+\sum\nabla_{\lambda_i}\xi^\mu u_{\lambda_1\cdots\mu\cdots\lambda_r}$$
$$-\sum(\nabla_{\lambda_i}\xi^\mu+\nabla^\mu\xi_{\lambda_i})u_{\lambda_1\cdots\mu\cdots\lambda_r}$$
$$=\nabla^\mu\xi_\mu u_{\lambda_1\cdots\lambda_r}+(\theta(X)u)_{\lambda_1\cdots\lambda_r}-\sum(\theta(X)g)_{\lambda_i\alpha}g^{\alpha\mu}u_{\lambda_1\cdots\mu\cdots\lambda_r}.$$
$$\therefore\quad(\delta e(X)+e(X)\delta)u=-\delta(X)u.$$

(ii) $$\delta\bar\theta(X)=-\delta(\delta e(X)+e(X)\delta)=-\delta e(X)\delta$$
$$\bar\theta(X)\delta=-(\delta e(X)+e(X)\delta)\delta=-\delta e(X)\delta.$$

50. 设 u 为调和张量，则 $du=0$。故对于任意的 X

$$\theta(X)u=(di(X)+i(X)d)u=di(X)u. \qquad (1)$$

因此得

$$d\theta(X)u=ddi(X)u=0. \qquad (2)$$

另外，对于开玲向量 X，

$$\theta(X)g=0, \qquad \operatorname{div}X=0$$

成立。由第 48 题知

$$\theta(X)u+\overline{\theta}(X)u=0.$$

因 $\delta u=0$，故由上式得

$$\delta\theta(X)u=-\delta\overline{\theta}(X)u=-\overline{\theta}(X)\delta u=0 \qquad (3)$$

从(2),(3)可见，$\theta(X)u$ 是调和张量。然而由第 43 题知，若调和张量具有 dv 的形状则为0，故由(1)得 $\theta(X)u=0$。

参　考　书

黎曼几何是研究流形的一个方面，运用经典微分几何、张量分析、李群、拓扑学、微分拓扑学等来研究它。故想要深入研究黎曼几何就需要这些知识。从本书亦可看出，仅用张量分析也能够得到相当的成果，但为了能够对什么是重要的作判断，希望具有广泛的数学基础。

推荐以下各书做为继本书之后的参考书。

栗田　稔：黎曼几何学，至文堂，1965,1976.将有中译本出版。

松本与三：多样体入门，裳华房，1965。

佐佐木重夫：黎曼几何学，Ⅰ,Ⅱ,共立出版社。
（现代数学讲座）。 有中译本。

S.S.Chern: Differentiable manifolds, Lecture note.

索引

（按汉语拼音排列）

王运达译微分几何新书简介

《曲线与曲面的微分几何》〔日〕小林昭七(S.Kobayashi) 著　北大吴光磊教授序　32 开本 206 页日文 1977 年第一版。用外微分形式写的大学生教材或参考书。习题有略解。讲课时数约 50 学时。

《黎曼几何》〔日〕立花俊一(S.Tachibana) 著　北师大朱鼎勋教授序　32 开本 197 页．中译本根据 1974 年版全文译出．该书是用张量分析法以现代的观点为大学高年级学生或研究生写的教材．讲课时数约 70 学时。

《黎曼几何习题集》立花俊一著 32 开本 221 页。除上述《黎曼几何》的习题外，增加二百余题并作了解答。许多习题选自出版当时最新文献。共有例题 62 ，习题 276。

《微分形式——在场论上的应用》王运达编译 32 开本 45 页.为工科院校、师范院校学生写的讲义。统一了牛顿·莱布尼兹公式，格林公式，奥·高公式，斯托克斯公式．给讲授场论，特别是给曲线坐标下的拉氏算子提供了新途径。讲课时数约22学时。有习题和略解。

上列各书均已铅印成册，近期将出版的尚有：

《微分几何学概论》〔日〕石原繁 (S.Ishihara)著　南京大学黄正中教授序 1976 年第一版。此书巧妙地运用并融合了外形式、张量分析、代数拓扑学等方法讲解二维流形的微分几何，是一本很有特色的书。可作大学生的微分几何选修课用。原书约22万字，有习题略解。

《黎曼几何》〔日〕栗田稔 (M.Kurita) 著。本书用外形式法有系统、由浅入深地介绍了这门科学。内容涉及欧氏平面、三维欧氏空间、二维曲面论、微分流形、黎曼流形。全面地讨论了活动标架，是一本容易接近的书。可作大学生、研究生的教材或参考书，也适于自学。原书约 18 万字。有习题略解。中译本根据 1976 年版全文译出。

[General Information]
书名=黎曼几何习题集
作者=（日）立花俊一
页数=222
SS号=10069939
出版日期=1981年10月第1版